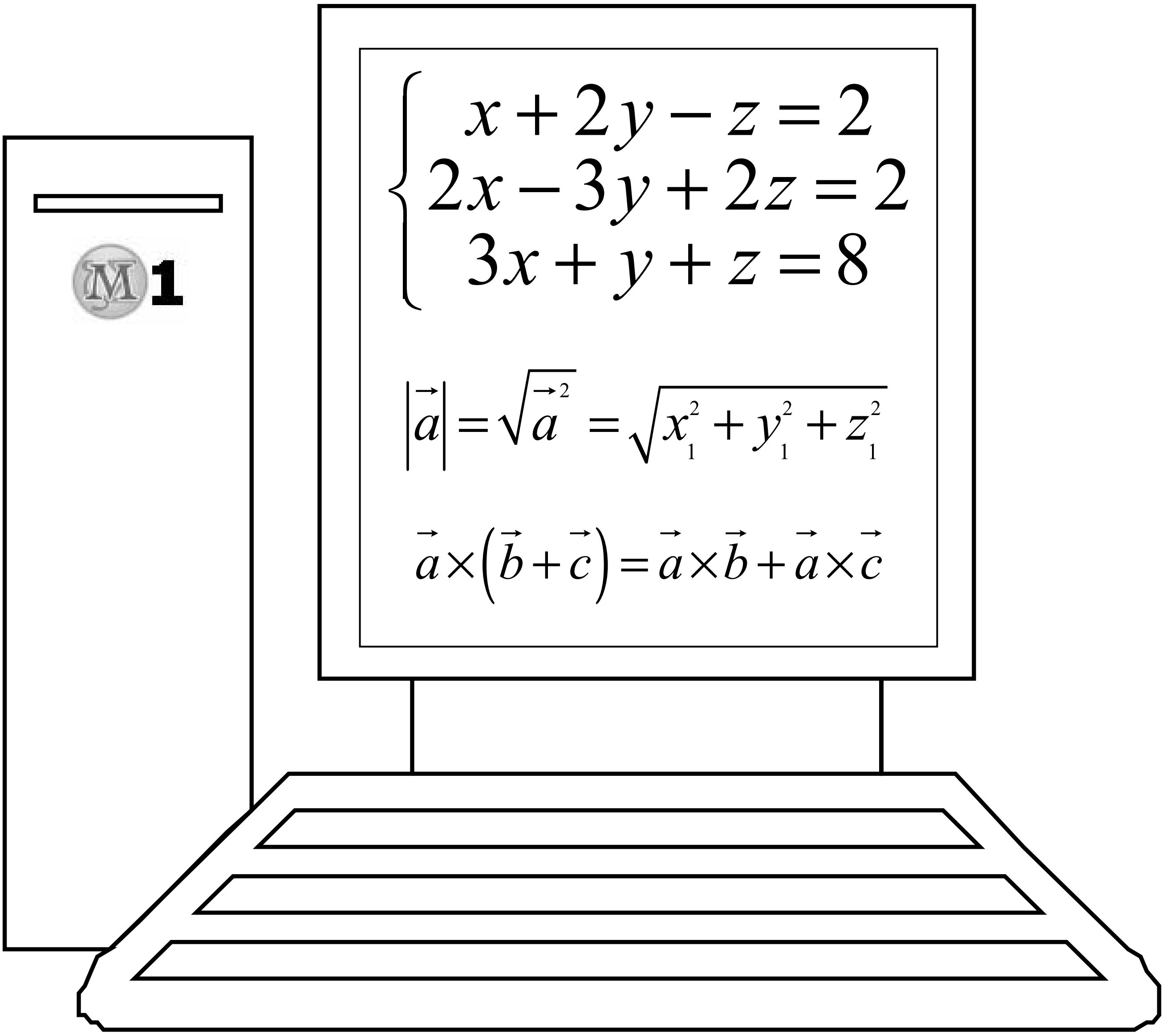
О.М. Полінський, І.М. Пістунов

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА, ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ З РОЗРАХУНКАМИ НА КОМП'ЮТЕРІ



Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.М. Полінський
І.М. Пістунов

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА, ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ З РОЗРАХУНКАМИ НА КОМП'ЮТЕРІ

(Навчальний посібник)

Дніпропетровськ
2008

УДК 512.64.(075.8)
ББК 22.143я7
П50

Затверджено вченою радою Національного гірничого університету як навчальний посібник з дисципліни «Математика для економістів» для студентів очної та заочної форм навчання в циклі професійної підготовки бакалавра за напрямками 0501 – «Економіка і підприємництво» та 0502 – «Менеджмент» (протокол № 8 від 24.12.2007 р.).

Рецензенти:
В.І.Корсун, д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри електротехніки та метрології (Національний гірничий університет);
Н.М.Єршова, д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри прикладної математики, (Придніпровська державна академія будівництва та архітектури).

Автори:
О.М.Полінський, – к-т техн. наук, доц. (розділи 2-3);
І.М.Пістунов, – д-р техн. наук, проф. (розділ 1).

Полінський О.М., Пістунов І.М.
П50 Елементарна математика, лінійна та векторна алгебра для економістів з розрахунками на комп'ютері: Навч. посібник. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2008. – 166 с.

Навчальний посібник містить теорію, приклади розв’язування та індивідуальні завдання для закріплення отриманих знань студентів з дисципліни «Математика для економістів» освітньо-кваліфікаційної програми підготовки бакалавра за напрямками 0501 – «Економіка й підприємництво» та 0502 – «Менеджмент».

Для контролю і поглиблення знань, що отримані у середній школі, посібник починається з розділу «Елементарна математика».

Подано прийоми розв’язування задач із застосуванням комп’ютерної програми *Maxima* вільного програмного забезпечення.

Посібник базується на літературних джерелах вітчизняних та зарубіжних авторів, комп’ютерних програмах та досвіді викладання дисципліни «Математика для економістів» у Національному гірничому університеті.

УДК 512.64.(075.8)
ББК 22.143я7

ЗМІСТ

ВСТУП

Вибравши для себе спеціальність, пов'язану з економікою, студент назавжди зв'язав свою долю з математикою. У стінах вищого навчального закладу студентові доведеться мати справу з безліччю математичних дисциплін, перша з яких «Математика для економістів». Шкільний курс алгебри та геометрії створив фундамент математичної підготовки студента. Необхідно систематизувати, закріпити й протестувати ці знання. Для цього потрібно розв'язати деякі типові задачі з елементарної математики, згадати деякі формули. У цьому плані перший розділ посібника «Елементарна математика» буде настільною книгою для першокурсників. До того ж, наприкінці посібника розміщені витяг із таблиці Брадіса (додаток А) та степені деяких цілих чисел (додаток Б).

Відомо, що в основі «Математики для економістів» знаходяться найпростіші, азбучні її положення, що вивчаються в школі. Таким чином, шлях до пізнання сучасної, величезної, майже безмежної за своїм багатством галузі знань, лежить через вивчення *елементарної математики*.

Для розв'язання будь-якої складної задачі, необхідно провести ряд розрахунків, що без допомоги елементарної математики виконати було б неможливо. Основною особливістю всіх математичних наук є їх відвернений або абстрактний характер. Але дійсність завжди конкретна, і тому математичні положення, як і будь-яка теорія, відбивають її лише з деяким наближенням.

Ті величини, з якими ми маємо справу при вивченні економіки, є величинами, що змінюються або змінними. «Математика для економістів», вивчає змінні величини не ізольовано, а в їхньому взаємному зв'язку. Бурхливий розвиток сучасної математики тісно пов'язаний із тим, що теорія й практика висувають нові й нові задачі, які математика повинна вирішувати. Старих (елементарних) знань стає недостатньо, доводиться винаходити нові шляхи, нові методи. Так виникла *лінійна алгебра*, найбільш важлива в застосуваннях частина алгебри.

Першим, за часом виникнення, питанням, що відноситься до лінійної алгебри була теорія *лінійних рівнянь*. Розвиток останньої призвів до створення теорії *визначників*, а пізніше – теорії *матриць* і пов'язаної з нею теорії *векторних просторів* і *лінійних перетворень* у них, а також теорії *квадратичних форм*. Ці теорії широко застосовуються в економіці. У цьому посібнику представлені приклади, які наочно показують зв'язок економіки й математики.

Крім того, у посібнику запропоновані приклади розв'язування задач із використанням програми *Maxima* вільного програмного забезпечення. *Maxima* – це єдина з відкритих програм, здатна посперечатися за можливостями з комерційними *Mathematica* і *Maple*, що перевалюють ціною однієї копії за тисячу американських доларів.

Для роботи з даною програмою в операційній системі *Linux* треба в командному рядку набрати команду `maxima` (`xmaxima` якщо є графічна оболонка) або нажати мишкою на ярлик робочого стола. У будь-якому випадку при старті виводиться деяка інформація про систему й «мітка» (%i1), що показує готовність програми до уведення команд користувача. Кожне уведення й виведення позначаються програмою й потім можуть бути використані знову. Символ %i (від input) використовується для позначення команд, уведених користувачем, а %o (від output) – при виведення результатів обчислень.

Для ініціалізації процесу обчислень необхідно ввести команду, потім символ «;» (крапка з комою) і нажати клавішу Enter. Якщо не потрібно виведення отриманої інформації на екран, то замість крапки з комою використовується символ $. Для арифметичних дій можна використовувати традиційні позначення: «+», «–», «*», «/» і «**» або «^» для піднесення в ступінь. Наприклад, в осередок %i1 можна записати:

```
(%i1) (1/2+1/3+1/4)/(1/5+1/6+1/8);
(%o1) 130/59
```

Як видно з останнього приклада *Maxima* завжди показує результат у точній аналітичній формі. Якщо потрібно одержати результат обчислення у вигляді числа із плаваючою крапкою, то після виразу, що вводиться наприкінці, треба через кому задати дескриптор numer. Для цих же цілей можна використовувати команду float, що перетворить отриманий результат у потрібний вид:

```
(%i2) float(%o1);
(%o2) 2.203389830508475
```

Звернутися до результату останньої команди можна за допомогою символу %:

```
(%i3) %-12/59;
(%o3) 2.0
```

У цьому випадку %-12/59 – це те ж саме, що й %o2-12/59. Це позначення дозволяє звертатися до останнього результату, не відволікаючись на те, який його номер.

Для повтору раніше уведеної команди, скажемо (%i3), в операційній системі *Linux* досить набрати комбінацію Alt+P, а в *Windows* досить нажати стрілку нагору. *Maxima* не звертає увагу на регістр уведених символів в іменах убудованих констант і функцій. Запис sin(x) еквівалентний запису SIN(x). Регістр букв, однак, важливий при використанні змінних, наприклад, *Maxima* уважає x і X різними змінними.

Для стандартних математичних констант використовуються наступні позначення: %e – для підстави натуральних логарифмів, %i – для мнимої одиниці (квадратний корінь із числа –1), %pi – для числа π. Позначення для деяких функцій: sqrt – для кореня квадратного, log – для натуральних логарифмів. Для деяких тригонометричних функцій: sin – синус, asin – арксинус, cos – косинус, acos – арккосинус, tan – тангенс, atan – арктангенс. Наприклад, щоб увести sin(π/6), необхідно набрати: sin(%pi/6).

Присвоювання значення будь-якої змінної здійснюється за допомогою знака «:» (двокрапка).

```
(%i4) x:2;
(%o4) 2
(%i5) y:3;
(%o5) 3
(%i6) x + y;
(%o6) 5
```

Символ «**=**» (дорівнює) використовується при введенні рівнянь або підстановок. Наприклад:

```
(%i7) equation:t^3-t=0;
(%o7) t^3-t=0
(%i8) solve(equation,t);
(%o8) [t=-1,t=1,t=0]
```

В останньому прикладі ми скористалися убудованою функцією – `solve`. Таких убудованих функцій в *Maxima* дуже багато, через них реалізовано майже все, що сприймається як дії над будь-якими об'єктами. Так, у цьому випадку об'єкт – це рівняння, а дія – пошук розв`язку цього рівняння. Такими функціями є, наприклад:

`linsolve` – розв`язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, де число рівнянь дорівнює числу невідомих;

`algsys`, що розв`язує одномірні багаточлени або поліномні рівняння й допускає більшу кількість рівнянь чим змінних або навпаки.

У міру вивчення розділів «Математики для економістів» будуть розкриватися всі необхідні функції програми *Maxima*. Так, наприклад, для розділу «Елементарна математика» будуть корисні функції `expand`, що розкриває дужки й призводить вираз до канонічного виду; `divide`, яку можна використовувати для знаходження частки й решти від ділення одного багаточлена на інший; `gcd`, що визначає найбільший загальний дільник багаточленів; `factor`, що здійснює розкладання багаточлена на множники; `ratsimp` виносить за дужки найбільший загальний дільник.

Для завдання додаткових умов використовується функція `assume`. Функція `forget` (to forget – забувати) знімає всі обмеження, накладені за допомогою `assume`.

Будь-яке ім'я, що має значення, чи то ім'я осередку `%i` або `%o`, чи то будь-яке інше ім'я, що призначено виразу за допомогою «:», можна очистити за допомогою функції `kill`. Цією ж функцією можна очистити всю пам'ять разом, набравши «`kill(all)`»; після цього нумерація осередків знову піде з одиниці. Необхідно іноді це робити, тому що імена змінних у сеансах роботи можуть повторюватися.

```
(%i9) kill(x);
(%o9)                   DONE
(%i10) x + y;
(%o10)                  x + 3
(%i11) kill(all);
(%o0)             DONE
```

```
(%i1) x + y + t;
(%o1)                    y + x + t
```

Для завершення роботи із системою застосовується функція `quit();`, а переривання процесу обчислень здійснюється натисканням комбінації клавіш `Ctrl+C` (після чого варто ввести `:q` для повернення в звичайний режим роботи).

Довідка про ту або іншу функцію виводиться по команді `describe(ім'я функції)`. При роботі в графічній оболонці XMaxima, можна скористатися пунктом меню `help`. Процедура `example(ім'я функції)` демонструє приклади використання потрібної в цей момент функції.

Версія, яка існує на момент виходу даного посібника – 5.14.0, і робота в основному ведеться над зачисткою коду для випуску вітки 6.0. Нові версії можна завантажувати на сайті *http://maxima.sourceforge.net/ru/*. За цією адресою знаходяться інсталяційні пакети, що призначені як для операційної системи *Windows* так і для *Linux*.

1. ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА

Розділ присвячено розв'язуванню типових завдань з елементарної математики та перевірці знань, одержаних у середній школі. Вивчивши зміст розділу, студенти мають опанувати основні прийоми тригонометрії та планіметрії, розв'язування алгебраїчних і логарифмічних нерівностей та рівнянь, а також навчитися складати рівняння.

1.1. Тригонометрія

Тригонометрія (від грецького trígōnon – трикутники й metros – виміряти), розділ математики, у якому вивчаються *тригонометричні функції* та їхні застосування щодо геометрії.

Тригонометричні функції – один із найважливіших класів елементарних функцій. Для визначення тригонометричних функцій зазвичай розглядають коло одиничного радіуса із двома взаємно перпендикулярними діаметрами $A'A$ і $B'B$ (рис. 1.1). Від точки A вздовж кола відкладаються кути, що вважаються позитивними, якщо відкладаються в напрямку від A до B (проти руху годинникової стрілки), і негативними, якщо вони відкладаються в напрямку від A до B' (за рухом годинникової стрілки). Проекцію OQ радіуса OC на діаметр $B'B$ називають синусом кута α ($OQ = \sin\alpha$). Проекція OP радіуса OC на діаметр $A'A$ називається косинусом кута α ($OP = \cos\alpha$).

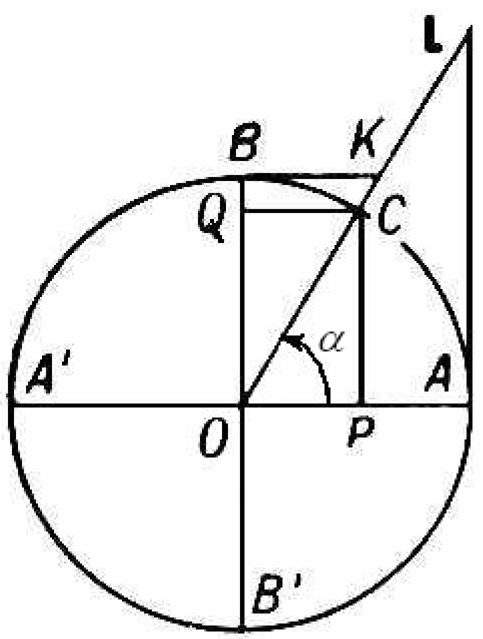


Рис. 1.1. Тригонометричне коло

Тригонометричні функції $\cos\alpha$ та $\sin\alpha$ не можуть за абсолютною величиною перевищувати 1, тобто $|\cos\alpha| \le 1$, $|\sin\alpha| \le 1$.

З того, що радіус кола дорівнює одиниці, випливає, що $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$ можна розглядати як синус і косинус кута. Узагалі під аргументом тригонометричних функцій прийнято розуміти число, яке можна розглядати геометрично як радіанну міру кута. Для гострих кутів α ($0<\alpha<\pi/2$), і тільки для них, можна розглядати:

$\sin\alpha$ - як відношення між протилежним до кута α катетом і гіпотенузою;

$\cos\alpha$ - як відношення між прилеглим до кута α катетом і гіпотенузою;

$\mathrm{tg}\alpha$ - як відношення між протилежним і прилеглим до кута α катетів;

$\mathrm{ctg}\alpha$ - як відношення між прилеглим і протилежним до кута α катетів;

$\sec\alpha$ - як відношення між гіпотенузою й прилеглим до кута α катетом;

$\mathrm{cosec}\alpha$ - як відношення між гіпотенузою й протилежним до кута α катетом.

Дуга AB кола називається 1-ою його чвертю, відповідно дуга BA' – 2-ою, $A'B'$ – 3-ою, $B'A$ – 4-ою чвертями. Для 1-ої чверті: $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha>0$; 2-ої чверті: $\cos\alpha<0$, $\sin\alpha>0$; 3-ої чверті: $\cos\alpha<0$, $\sin\alpha<0$; 4-ої чверті: $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha<0$.

Крім того, $\cos\alpha$ – парна функція: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, а $\sin\alpha$ – непарна функція: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

За допомогою основних тригонометричних функцій можна визначити інші тригонометричні функції:

тангенс $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$, котангенс $\mathrm{ctg}\alpha = \cos\alpha/\sin\alpha$,

секанс $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$, косеканс $\mathrm{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha$.

При цьому $\mathrm{tg}\alpha$ і $\sec\alpha$ визначаються тільки для тих кутів α, для яких $\cos\alpha \ne 0$; а $\mathrm{ctg}\alpha$ і $\mathrm{cosec}\alpha$ для тих α, для яких $\sin\alpha \ne 0$; функція $\sec\alpha$ – парна, а функції $\mathrm{cosec}\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{ctg}\alpha$ – непарні. Ці функції також можуть бути представлені геометрично відрізками прямих (рис. 1.1): $\mathrm{tg}\alpha = AL$, $\mathrm{ctg}\alpha = BK$, $\sec\alpha = OL$, $\mathrm{cosec}\alpha = OK$ (для гострих кутів α і відповідними відрізками для інших кутів). Із цим геометричним розумінням пов'язане й походження назв тригонометричних функцій. Так, латинське *tangens* означає дотичну ($\mathrm{tg}\alpha$ зображується відрізком AL дотичної до кола), *secans* – січну ($\sec\alpha$ зображується відрізком OL січної до кола). Назва «синус» (латинською *sinus* – вигин, пазуха) являє собою переклад арабського «джайб», що є, напевно, перекручуванням санскритського слова «джива» (буквально – тятива лука), яким індійські математики позначали синус. Назви «косинус», «котангенс», «косеканс» являють собою скорочення терміна *complementi sinus* (синус доповнення) і йому подібних, що виражають той факт, що $\cos\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$ і $\mathrm{cosec}\alpha$ дорівнюють відповідно синусові, тангенсові й секансові аргументу кута, додаткового до α:

$$\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha);\ \mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}(90^0 - \alpha);\ \mathrm{cosec}\alpha = \sec(90^0 - \alpha).$$

Точка C служить кінцем дуг α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, … (2π – довжина кола), тому всі тригонометричні функції є періодичними. Головним періодом функцій $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\mathrm{cosec}\alpha$ є число 2π (кут у 360^0), а головним періодом $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{ctg}\alpha$ – число π (кут у 180^0). Графіки тригонометричних функцій див. на рис. 1.2.

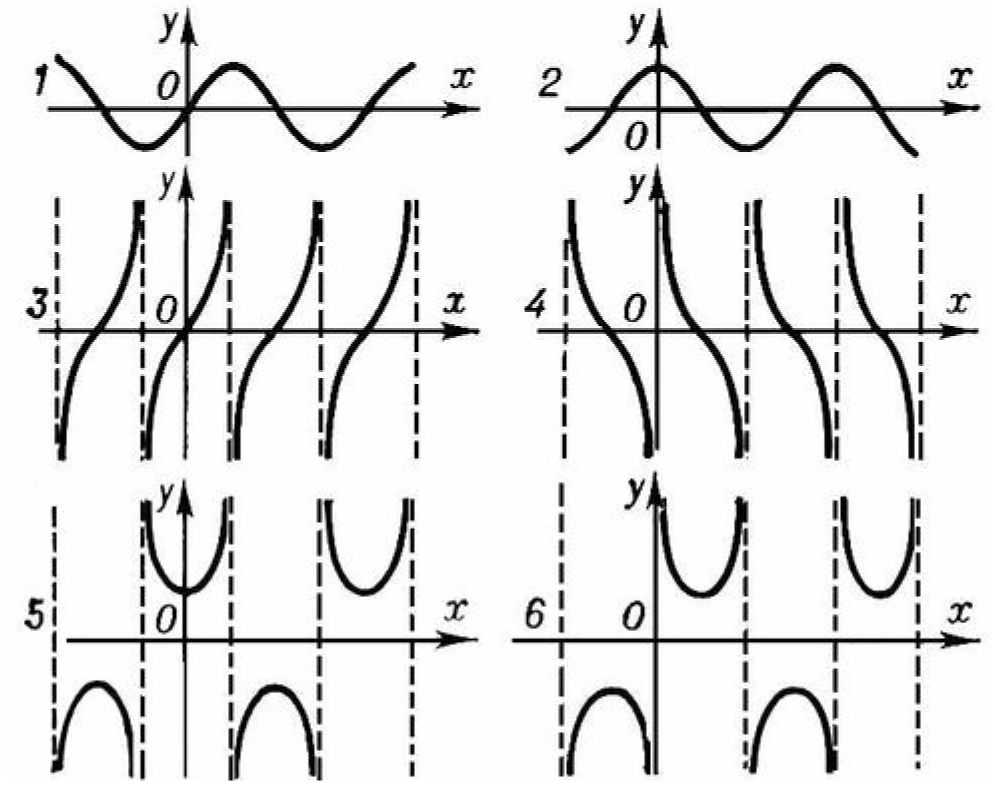


Рис. 1.2. Графіки тригонометричних функцій: 1 – синус; 2 – косинус; 3 – тангенс; 4 – котангенс; 5 – секанс; 6 – косеканс.

Значення тригонометричних функцій того самого аргументу пов'язані між собою співвідношеннями:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$; $\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \mathrm{cosec}^2\alpha$.

Для значень аргументу кратних 30^0 і 45^0 значення тригонометричних функцій можуть бути отримані з геометричних розумінь (табл. 1.1 і табл. 1.2). Для інших значень аргументу значення функцій наведені в додатку А.

Таблиця 1.1

Значення тригонометричних функцій для кутів кратних 30^0 і 45^0 ($\pi/6$ і $\pi/4$) у І і ІІ чвертях

	I чверть					***II чверть***			
град.	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
рад.	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sinα	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	–1
tgα	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	–1	$-\sqrt{3}/3$	0
ctgα	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	–1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Таблиця 1.2

Значення тригонометричних функцій для кутів кратних 30^0 і 45^0 ($\pi/6$ і $\pi/4$) у III і IV чвертях

	III чверть					***IV чверть***			
град.	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
рад.	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
sinα	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
cosα	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tgα	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0
ctgα	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Для великих значень аргументу можна користуватися так званими формулами зведення, що дозволяють виразити тригонометричні функції будь-якого аргументу через тригонометричні функції аргументу α, що задовольняє співвідношенню $0 \le \alpha \le \pi$ або навіть $0 \le \alpha \le \pi/2$, що спрощує складання таблиць і побудову графіків тригонометричних функцій, а також користування ними. Ці формули наведені в таблиці 1.3:

Таблиця 1.3

Формули зведення

	$\pi/2-\alpha$	**$\pi/2+\alpha$**	**$\pi-\alpha$**	**$\pi+\alpha$**	**$3\pi/2-\alpha$**	**$3\pi/2+\alpha$**	**$2\pi-\alpha$**
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$

Найважливішими тригонометричними формулами є формули, що виражають тригонометричні функції суми або різниці значень аргументів через тригонометричні функції цих значень:

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$; $\quad$ $\mathrm{tg}(x \pm y) = (\mathrm{tg}x \pm \mathrm{tg}y)/(1 \mp \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y)$;

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \pm \sin x \cdot \sin y$; $\quad$ $\mathrm{ctg}(x \pm y) = (\mathrm{ctg}x \cdot \mathrm{ctg}y \mp 1)/(\mathrm{ctg}x \pm \mathrm{ctg}y)$.

Знаки в лівій і правій частинах усіх формул погоджені, тобто верхньому (нижньому) знакові ліворуч відповідає верхній (нижній) знак праворуч.

Із цих формул випливають формули для тригонометричних функцій кратних аргументів, наприклад:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = (2\mathrm{tg}\alpha) / (1+\mathrm{tg}^2\alpha);$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$
$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = (2\,\mathrm{tg}\alpha) / (1-\mathrm{tg}^2\alpha);$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha = (\mathrm{ctg}^2\alpha - 1) / 2\mathrm{ctg}\alpha;$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha - \sin^3\alpha = 4\sin\alpha \cdot \sin(60^0 - \alpha) \cdot \sin(60^0 + \alpha);$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha;$$
$$\mathrm{tg}3\alpha = (3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha) / (1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha);$$
$$\mathrm{tg}\,3\alpha = \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\,(60^0 - \alpha) \cdot \mathrm{tg}\,(60^0 + \alpha);$$
$$\mathrm{ctg}3\alpha = (\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha) / (3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1);$$
$$\sin 4\alpha = 8\cos^3\alpha \cdot \sin\alpha - 4\cos\alpha \cdot \sin\alpha;$$
$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1;$$
$$\mathrm{tg}4\alpha = (4\mathrm{tg}\alpha - 4\mathrm{tg}^3\alpha) / (1 - 6\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^4\alpha);$$
$$\mathrm{ctg}4\alpha = (\mathrm{ctg}^4\alpha - 6\mathrm{ctg}^2\alpha + 1) / (4\mathrm{ctg}^3\alpha - 4\mathrm{ctg}\alpha).$$

Часто бувають корисними формули, що виражають степені $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$ простого аргументу через $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$ кратного, наприклад:

$$\sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha) / 2;$$
$$\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha) / 2;$$
$$\sin^2\alpha = 1 / (1 + \mathrm{ctg}^2\alpha) = \mathrm{tg}^2\alpha / (1 + \mathrm{tg}^2\alpha);$$
$$\cos^2\alpha = 1 / (1 + \mathrm{tg}^2\alpha) = \mathrm{ctg}^2\alpha / (1 + \mathrm{ctg}^2\alpha);$$
$$\sin^3\alpha = \tfrac{1}{4}\,(3\sin\alpha - \sin 3\alpha);$$
$$\cos^3\alpha = \tfrac{1}{4}\,(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha);$$
$$\sin^4\alpha = 1/8\,(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3);$$
$$\cos^4\alpha = 1/8\,(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3).$$

Формули для $\sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\mathrm{tg}^2\alpha$, $\mathrm{ctg}^2\alpha$ можна використовувати для визначення значень тригонометричних функцій половинного аргументу:

$$\sin^2\alpha/2 = (1 - \cos\alpha) / 2; \qquad \cos^2\alpha/2 = (1 + \cos\alpha) / 2;$$
$$\mathrm{tg}^2\alpha/2 = (1 - \cos\alpha) / (1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha / (1 + \cos\alpha)^2 = (1 - \cos\alpha)^2 / \sin^2\alpha;$$
$$\mathrm{ctg}^2\alpha/2 = (1 + \cos\alpha) / (1 - \cos\alpha) = \sin^2\alpha / (1 - \cos\alpha)^2 = (1 + \cos\alpha)^2 / \sin^2\alpha.$$

Бувають також корисними такі співвідношення між тригонометричними функціями:

$$\sin\alpha = (2\,\mathrm{tg}\,\alpha/2) / (1 + \mathrm{tg}^2\alpha/2); \qquad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\alpha/2;$$
$$\sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha / (1 + \mathrm{tg}^2\alpha)^2 = 1 / (1 + \mathrm{ctg}^2\alpha)^2; \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\alpha/2;$$
$$\cos\alpha = (1 - \mathrm{tg}^2\alpha/2) / (1 + \mathrm{tg}^2\alpha/2); \qquad 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 / \cos^2\alpha,\ \alpha \neq \pi(2n+1)/2;$$
$$\cos^2\alpha = 1 / (1 + \mathrm{tg}^2\alpha)^2 = \mathrm{ctg}\alpha / (1 + \mathrm{ctg}^2\alpha)^2; \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 / \sin^2\alpha,\ \alpha \neq \pi n.$$

Сума або різниця тригонометричних функцій різних аргументів можуть бути перетворені на добутки за формулами:

$$\sin x + \sin y = 2\sin((x+y)/2) \cdot \cos((x-y)/2); \qquad \mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}y = (\sin(x-y)) / (\cos x \cos y);$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos((x+y)/2) \cdot \sin((x-y)/2); \qquad \mathrm{ctg}\,x + \mathrm{ctg}\,y = (\sin(x+y)) / (\sin x \sin y);$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos((x+y)/2) \cdot \cos((x-y)/2); \qquad \mathrm{ctg}\,x - \mathrm{ctg}\,y = -(\sin(x-y)) / (\sin x \sin y);$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin((x+y)/2)\sin((x-y)/2); \qquad \mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,y = (\cos(x-y)) / (\cos x \sin y);$$
$$\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y = (\sin(x+y)) / (\cos x \cos y); \qquad \mathrm{ctg}\,x - \mathrm{tg}\,y = (\cos(x+y)) / (\sin x \cos y).$$

Навпаки, добутки тригонометричних функцій можуть бути перетворені на суму або на різницю за формулами:

$$\sin x \sin y = ½(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$
$$\cos x \cos y = ½(\cos(x-y) + \cos(x+y));$$
$$\sin x \cos y = ½(\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

Похідні всіх тригонометричних функцій виражаються через тригонометричні й алгебраїчні функції:

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2};$$
$$(\cos x)' = -\sin x; \qquad (\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2};$$
$$(\mathrm{tg}\, x)' = 1/\cos^2 x; \qquad (\mathrm{arctg}\, x)' = 1/(1+x^2);$$
$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -1/\sin^2 x; \qquad (\mathrm{arcctg}\, x)' = -1/(1+x^2).$$

При інтегруванні тригонометричних функцій виходять тригонометричні функції або їхні логарифми:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \qquad \int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C; \qquad \int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C;$$
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C; \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Рівняння $x = \sin y$ визначає «y» як багатозначну функцію від «x». Функція «y» є зворотною стосовно синуса й позначається як $y = \arcsin x$. Аналогічно визначаються функції, зворотні стосовно косинуса, тангенса, котангенса, секанса й косеканса: $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$, $\mathrm{arcsec}\, x$, $\mathrm{arccosec}\, x$ відповідно. Усі ці функції називаються ***зворотними тригонометричними функціями***.

$$\sin(\arcsin \alpha) = \alpha; \qquad \arcsin(\sin\alpha) = \alpha,\ \alpha \in [-\pi/2;\ \pi/2];$$
$$\cos(\arccos \alpha) = \alpha; \qquad \arccos(\cos \alpha) = \alpha,\ \alpha \in [0;\ \pi];$$
$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, \alpha) = \alpha; \qquad \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, \alpha) = \alpha,\ \alpha \in [-\pi/2;\ \pi/2];$$
$$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, \alpha) = \alpha; \qquad \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, \alpha) = \alpha,\ \alpha \in [0;\ \pi];$$
$$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha - 2\pi n,\ \alpha \in [-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n];$$
$$\arcsin(\sin\alpha) = (2n+1)\pi - \alpha,\ \alpha \in [\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n];$$
$$\arccos(\cos\alpha) = \alpha - 2\pi n,\ \alpha \in [2\pi n; (2n+1)\pi];$$
$$\arccos(\cos\alpha) = 2\pi n - \alpha,\ \alpha \in [(2n-1)\pi; 2\pi n];$$
$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\alpha) = \alpha - \pi n,\ \alpha \in (-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n);$$
$$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\alpha) = \alpha - \pi n,\ \alpha \in (\pi n; (n+1)\pi).$$

Співвідношення між зворотними тригонометричними функціями:

$$\arcsin\alpha = -\arcsin(-\alpha) = \pi/2 - \arccos\alpha = \mathrm{arctg}\, \alpha/\sqrt{(1-\alpha^2)};$$
$$\arccos\alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \pi/2 - \arcsin \alpha = \mathrm{arc\ ctg}\alpha/\sqrt{(1-\alpha^2)};$$

$$\text{arctg}\alpha = -\text{arctg}(-\alpha) = \pi/2 - \text{arcctg}\alpha = \arcsin(\alpha/\sqrt{(1+\alpha^2)}) = \arccos(1/\sqrt{(1+\alpha^2)});$$
$$\text{arcctg}\,\alpha = \pi - \text{arcctg}(-\alpha) = \arccos(\alpha/\sqrt{(1+\alpha^2)});$$
$$\text{arctg}\,\alpha = \text{arcctg}(1/\alpha);\ \arcsin\alpha + \arccos\alpha = \pi/2;\ \text{arcctg}\,\alpha + \text{arctg}\,\alpha = \pi/2.$$

Для обчислення тригонометричних функцій у *Maxima* доступні прямі та зворотні тригонометричні функції: синус (`sin` x), косинус (`cos` x), тангенс (`tan` x), котангенс (`cot` x), арксинус (`asin` x), арккосинус (`acos` x), арктангенс (`atan` x), арккотангенс (`acot` x). Окрім них є менш відомі функції – секонс (`sec` $x = 1/\cos x$) і косеконс (`csc` $x = 1/\sin x$), а також гіперболічні функції – гіперболічний синус (`sinh` $x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$), гіперболічний косинус (`cosh` $x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$), гіперболічний тангенс (`tan` $x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$), гіперболічний котангенс (`cot` $x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$).

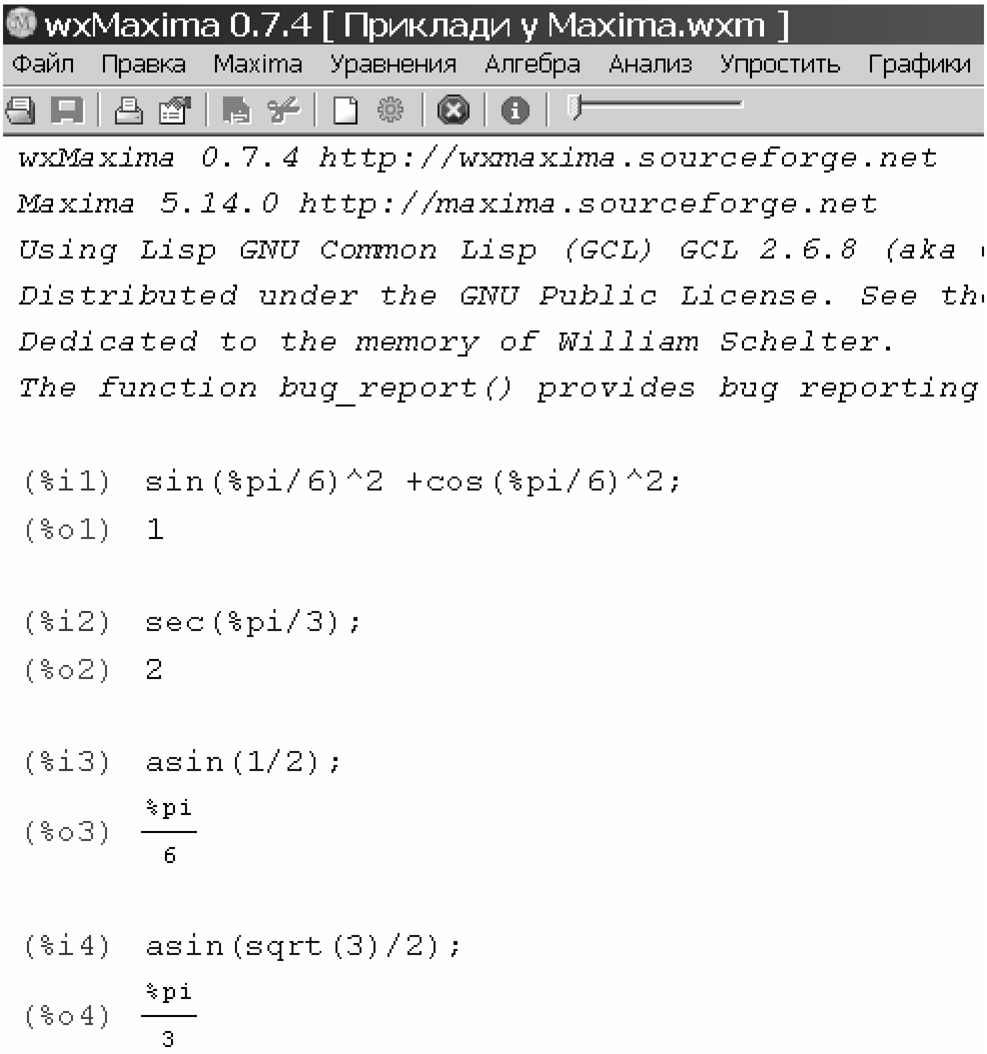


Рис. 1.3. Фрагмент обчислень тригонометричних функцій у *Maxima*

Maxima легко оперує тригонометричними виразами. Так, функція `trigexpand` використовує формули перетворення сум двох кутів для представлення введеного виразу в найбільш простому вигляді:

```
(%i5) sin(u+v)*cos(u)^3;
```

$$\text{(\%o5)}\quad \cos(u)^3 \sin(v+u)$$

```
(%i6) trigexpand(%);
```

$$\text{(\%o6)}\quad \cos(u)^3(\cos(u)\sin(v)+\sin(u)\cos(v))$$

Функція `trigreduce` перетворить тригонометричний вираз до суми елементів, кожен з яких містить тільки єдиний `sin` або `cos`:

```
(%i7) trigreduce(%);
```

$$\text{(\%o7)}\quad \frac{\sin(v+4u)+\sin(v-2u)}{8}+\frac{3\sin(v+2u)+3\sin(v)}{8}$$

Функція `trigsimp` використовує тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, а також тотожність $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, щоб спростити вирази, які містять `tan`, `sec` і тому подібні у вирази, які містять `sin`, `cos`, `sinh`, `cosh`. Функції `ratsimp` і `radcan` також можуть сприяти спрощенню результату.

Тригонометричне рівняння – алгебраїчне рівняння щодо тригонометричної функцій невідомого аргументу. Для розв'язування тригонометричних рівнянь, користуючись різними співвідношеннями, їх перетворюють до такого виду, щоб можна було визначити значення однієї із тригонометричних функцій шуканого аргументу. Після цього розв'язки тригонометричних рівнянь знаходять за допомогою ***зворотних тригонометричних функцій***.

Наприклад, вираз $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ можна перетворити до вигляду: $2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$, або $\sin 2x\,(2\cos x + 1) = 0$.

Звідки: $\sin 2x = 0$, або $\cos x = -1/2$.

Це дає розв'язки:

$x = \arcsin 0 = 0+2\pi n$ і $x = \arccos(-1/2) = 2/3\pi(3n \pm 1)$, де n – довільне ціле число (позитивне або негативне).

Для узагальнення розв'язку тригонометричних рівнянь використовують формули:

$\sin x = m$; $|m| \le 1$, $x = (-1)^n \arcsin m + \pi n$, $n \in Z$;

якщо $\sin x = 1$, то $x = \pi/2 + 2\pi n$;

якщо $\sin x = 0$, то $x = \pi n$;

якщо $\sin x = -1$, то $x = -\pi/2 + 2\pi n$.

$\cos x = \mathrm{m}$; $|\mathrm{m}| \le 1$, $x = \pm \arccos \mathrm{m} + 2\pi n$;

якщо $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n$;

якщо $\cos x = 0$, то $x = \pi/2+\pi n$;

якщо $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n$.

tg $x = m$, $x = \text{arctg}\, m + \pi n$.
ctg $x = m$, $x = \text{arcctg}\, m + \pi n$.

Для розв’язування тригонометричних рівнянь використовують такі прийоми алгебри, як розкладання на множники та заміна.

Наприклад, вираз $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ за допомогою такого розкладання перетворюється на вираз $2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0$, у якому можливо винести $\cos x$ за дужки й розв'язати рівняння: $\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$.

В якості тригонометричної заміни використовують $\sin x/2 = 2t/(1+t^2)$ та $\cos x/2 = (1-t^2)/(1+t^2)$, де $t = \text{tg}x$.

Для розв’язування **тригонометричних нерівностей** використовують формули:

якщо $\sin\alpha \le m$, то $2\pi n + \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2 + 2\pi n$;
якщо $\sin\alpha \ge m$, то $2\pi n + \alpha_2 \le \alpha \le (\alpha_1 + 2\pi) + 2\pi n$;
якщо $\cos\alpha \le$ m, то $2\pi n + \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 + 2\pi n$;
якщо $\cos\alpha \ge$ m, то $2\pi n + \alpha_2 < \alpha < (\alpha_1 + 2\pi) + 2\pi n$;
якщо tg $\alpha \ge (\le)\ m$, то $\pi n + \text{arctg}\, m \le \alpha \le \text{arctg}\, m + \pi n$;
якщо ctg $\ge (\le)\ m$, то $\pi n + \text{arcctg}\, m < \alpha < \text{arcctg}\, m + \pi n$.

Наприклад, вираз $\sin\alpha \le 1/2$ можна перетворити на:

$$2\pi n + 5\pi/6 \le \alpha \le 13\pi/6 + 2\pi n.$$

А вираз $\cos\alpha \ge -\sqrt{2}/2$ можна перетворити на:

$$2\pi n + 5\pi/4 \le \alpha \le 11\pi/4 + 2\pi n.$$

<u>Приклади</u>

<u>Приклад 1.</u> Укажіть кількість і суму розв'язків рівняння в інтервалі $[0^0;360^0]$: $\sin^3(\pi - x) + \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos^4\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \cos^4(x - \pi)$.

◄ Знайдемо область дозволених значень (ОДЗ): $x \in R$.

За формулами зведення: $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^4 x - \cos^4 x$.

За формулами скороченого множення:

$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$; $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)\cdot(a^2 + b^2)$.

$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x) = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

За основною тригонометричною тотожністю $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, та з урахуванням формули $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ одержуємо рівняння:

$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = 0$,

$(\sin x + \cos x)(1 + \cos x - \sin x\cos x - \sin x) = 0$,

$(\sin x + \cos x)(1 + \cos x - \sin x\cdot(\cos x + 1) = 0$,

$(\sin x + \cos x)(1 + \cos x)(1 - \sin x) = 0$.

Розглянемо 3 випадки в інтервалі $[0^0; 360^0]$:

1) $\sin x + \cos x = 0$. Розділимо на $\cos x$:

$\operatorname{tg} x = -1;\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}.\ \ x_1 = \frac{3\pi}{4}$(при $k = 1$) і $x_2 = \frac{7\pi}{4}$(при $k = 2$).

2) $1 + \cos x = 0$, $\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}.\ \ x_3 = \pi$.

3) $1 - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathrm{Z}.\ \ x_4 = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: В інтервалі $[0^0; 360^0]$ усього чотири розв'язки рівняння.

Сума розв'язків $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 4\pi$.►

<u>Приклад 2.</u> Розв’язати рівняння: $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$.

◄ Знайдемо область дозволених значень (ОДЗ): $x \in R$.

Застосовуючи формули зниження ступеня, зведемо це рівняння до більш простого вигляду:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 4x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 8x) + \frac{1}{2}(1 - \cos 10x) = 2,$$

$$1 - \cos 4x + 1 - \cos 6x + 1 - \cos 8x + 1 - \cos 10x = 4,$$

$$\cos 4x + \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0.$$

Звідси, використовуючи формулу перетворення суми косинусів у добуток, одержуємо:

$$2\cos\frac{4x + 6x}{2} \cdot \cos\frac{4x - 6x}{2} + 2\cos\frac{8x + 10x}{2} \cdot \cos\frac{8x - 10x}{2} = 0,$$

$2\cos 5x \cos x + 2\cos 9x \cos x = 0$ або $\cos x(\cos 5x + \cos 9x) = 0$.

Розглянемо 2 випадки:

1) $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

2) $\cos 5x + \cos 9x = 0$, отже, знову використовуючи формулу перетворення суми косинусів у добуток, маємо:

$$\cos\frac{5x + 9x}{2} \cdot \cos\frac{5x - 9x}{2} = 0 \Rightarrow \qquad \cos 7x \cdot \cos 2x = 0 \Rightarrow$$

2а) $\cos 7x = 0 \Rightarrow 7x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}$

2б) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.

Таким чином, з урахуванням ОДЗ, одержуємо відповідь:

$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x_2 = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7},\ x_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathrm{Z}$.►

<u>Приклад 3.</u> Розв’язати рівняння: $10\cos 2x + 8 = \operatorname{tg} x$.

◄ Знайдемо ОДЗ: $\cos x \neq 0$, тобто $x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

Уведемо нову змінну $t = \mathrm{tg}x$.

Оскільки $\cos 2x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, рівняння прийме вигляд:

$$10\frac{1-t^2}{1+t^2} + 8 = t \qquad \text{або} \qquad 10\cdot\left(1-t^2\right) + 8\left(1+t^2\right) = t\cdot\left(1+t^2\right)$$

$10 - 10t^2 + 8 + 8t^2 - t - t^3 = 0 \Rightarrow \qquad t^3 + 2t^2 + t - 18 = 0$.

Розкладемо дане рівняння в такий спосіб:

$t^3 - 2t^2 + 4t^2 - 8t + 9t - 18 = 0$;

$t^2(t-2) + 4t(t-2) + 9\left(t-2\right) = 0 \Rightarrow (t-2)(t^2+4t+9) = 0$.

Квадратний тричлен у других дужках не має дійсних розв'язків. Отже, рівняння має тільки один розв’язок. Знайдемо розв'язки вихідного рівняння:

$\mathrm{tg}x = 2 \Rightarrow x = \mathrm{arctg}2 + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

Додатковий випадок розглядати не треба, тому що $\cos x \neq 0$.

Відповідь: $x = \mathrm{arctg}2 + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.►

Приклад 4. Розв’язати рівняння: $\mathrm{tg}x - \sin x = 1 - \mathrm{tg}x\cdot\sin x$.

◄ Знайдемо ОДЗ: $\cos x \neq 0$, тобто $x \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

Перетворимо рівняння в такий спосіб:

$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}x\cdot\sin x = 1 + \sin x$

$\mathrm{tg}x(1+\sin x) = 1 + \sin x$

$(1+\sin x)\mathrm{tg}x - (1+\sin x) = 0$

$(1+\sin x)(\mathrm{tg}x - 1) = 0.$

Розглянемо 2 випадки:

1) $(1+\sin x = 0) \Rightarrow (\sin x = -1) \Rightarrow (x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k)$; у цьому випадку вихідне рівняння розв’язків не має, тому що ці розв’язки не входять до ОДЗ;

2) $(\mathrm{tg}x - 1 = 0) \Rightarrow (\mathrm{tg}x = 1) \Rightarrow (x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k)$; ці значення входять до ОДЗ.

При розв`язанні цього прикладу в *Maxima* використовується функція solve. *Maxima* попереджає, що деякі розв`язки можуть бути загублені, оскільки не враховується періодичність функцій і навпаки, можуть бути розв`язки, що не входять в ОДЗ.

```
(%i8) solve([tan(x)-sin(x)=1-tan(x)*sin(x)], [x]);
`solve' is using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.
```

$(\%o8)\quad [x = \dfrac{\%pi}{4},\ x = -\dfrac{\%pi}{2}]$

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.►

1.2. Індивідуальне завдання № 1.1

Студент повинен розв’язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Обчислити значення виразу:

1. $\dfrac{\operatorname{tg}55^\circ - \operatorname{tg}35^\circ}{\operatorname{tg}20^\circ}$;

2. $\cos\left(\operatorname{arctg}2\sqrt{6}\right)$;

3. $\dfrac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ + \sqrt{2}\sin 44^\circ}$;

4. $\cos\left(\arcsin 1 + \arccos\dfrac{3}{5}\right)$;

5. $\dfrac{10\sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}$;

6. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right)$;

7. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} + \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}$;

8. $\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(-4\sqrt{3}\right)\right)$;

9. $\arcsin\left(\cos\dfrac{9\pi}{5}\right)$;

10. $\arccos\left(\sin\dfrac{12\pi}{5}\right)$;

11. $\arcsin(\cos\dfrac{33}{5}\pi)$;

12. $\dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$, якщо $\alpha - \beta = 90^\circ$;

13. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\alpha\right)$, якщо $\sin 4\alpha = 0,4$;

14. $9\cos(\alpha + \beta)$, якщо $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\sin\beta = -\dfrac{1}{3}$, $\alpha \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ 0\right]$.

Укажіть у градусах суму розв'язків рівняння:

15. $4\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right) = 4 - \cos^2(\pi - 3x)$, що належать проміжкові $\left[-90^\circ; 270^\circ\right]$;

16. $\cos\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{5}{2}$, що належать проміжкові $\left[-270^\circ; 90^\circ\right]$;

17. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$, що належать проміжкові $\left[0^\circ; 180^\circ\right]$.

Укажіть кількість розв'язків рівняння:

18. $2tg^2 x + 3 = \dfrac{3}{\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$, що належать проміжкові $\left[0^\circ; 360^\circ\right]$;

19. $1 + \operatorname{ctg}x = \cos x + \dfrac{1}{\sin x}$, що належать проміжкові $\left[0^\circ; 360^\circ\right]$;

20. $1 + \operatorname{ctg}x = \cos x + \dfrac{1}{\sin x}$.

Розв’язати рівняння:

21. $3 \cdot \sin^2 2x + 7 \cdot \cos 2x - 3 = 0$;

22. $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x$;

23. $\sin\left(15^\circ + x\right) + \sin\left(45^\circ - x\right) = 1$;

24. $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

25. $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0$;

26. $\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}2x + \mathrm{tg}3x = 0$;

27. $\sin 9x = 2\sin 3x$;

28. $\cos\left(20^\circ + x\right) + \cos\left(100^\circ - x\right) = \frac{1}{2}$;

29. $\sin^3 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^3 x = \frac{1}{4}$;

30. $\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

Довести, що:

31. $\mathrm{tg}20^\circ \cdot \mathrm{tg}40^\circ \cdot \mathrm{tg}80^\circ = \sqrt{3}$.

1.3. Планіметрія

Планіметрія (від лат. planum – площина і metros – виміряти), частина елементарної геометрії, у якій вивчаються властивості фігур, що лежать у площині.

Для **трикутника** (рис. 1.4) важливі наступні співвідношення:

Сума кутів $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$;

Теорема синусів: $a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma = 2R$, де R – радіус описаного кола;

Теорема косинусів: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$;

Теорема тангенсів: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$;

Бісектриса кута α: $l_a = \left(2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\right)/\left(b+c\right)$;

Площа через 3 сторони $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – напівпериметр, $p = ½\,(a+b+c)$;

Площа через висоту S = bh/2, де h – висота опущена на сторону b;

Площа через 2 сторони й кут між ними: $S = ½ \cdot ab \sin\alpha$;

Площа рівностороннього трикутника $S_{рівн.} = (\sqrt{3}\, a^2)/4$;

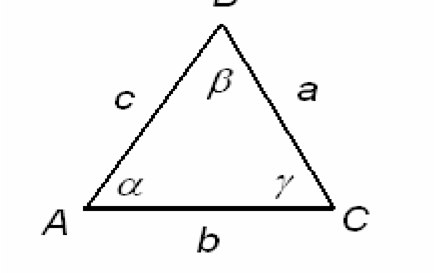


Рис. 1.4. Трикутник

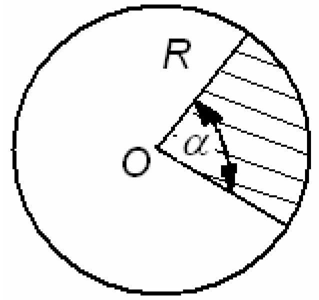


Рис. 1.5. Коло

Площа через радіус описаного кола S=$abc/4R$;
Площа через радіус вписаного кола S=pr.
Площа **кола** (рис. 1.5): S= πR^2.
Площа сектора кола: $S_{сектора}=(\pi R^2 \alpha)/360^0$.
Площа **трапеції** (рис. 1.6): $S = (a+b)/2\cdot$ h.
Площа **паралелограма** (рис. 1.7): S=ah;
Співвідношення між діагоналями й сторонами паралелограма:

$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2).$$

Площа **ромба** (рис. 1.7): S=ah= $a^2\cdot\sin\alpha = ½\cdot d_1 d_2$.
Співвідношення між діагоналями й сторонами ромба:

$$d_1=2a\cdot\sin\alpha/2;\ d_2=2a\cdot\cos\alpha/2;\quad d_1^2+d_2^2=4a^2.$$

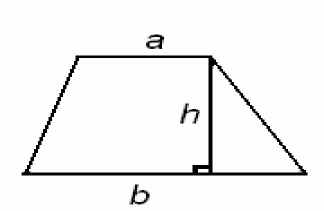


Рис. 1.6. Трапеція

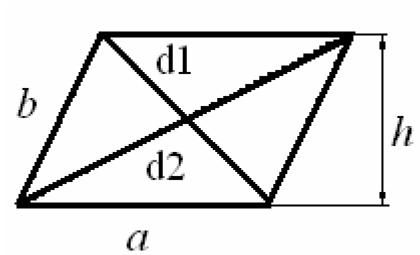


Рис. 1.7. Паралелограм

Приклади

Приклад 1. Дано 2 сторони трикутника a, b і медіана m_c, проведена до сторони c. Знайти сторону c.

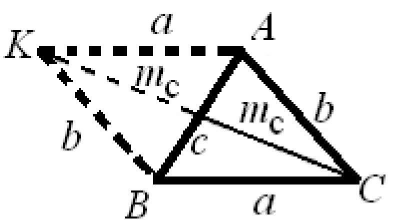


Рис. 1.8. Паралелограм *ACBK*

◄ Добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ACBK$. При цьому $KC = 2\cdot m_c$. За властивістю паралелограма: $4m_c^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2$. Звідси одержуємо: $c^2 = 2b^2 + 2a^2 - 4m_c$.

Відповідь: $c = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4m_c^2}$.►

Приклад 2. В колі проведені 3 хорди: AM = 6 см, MB = 4 см, MC = 1 см. Хорда MB поділяє вписаний кут AMC навпіл. Знайти радіус кола.

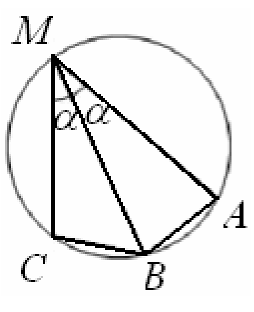


Рис. 1.9. Коло з трьома хордами

◄ Нехай кут $AMB = \alpha$. За теоремою косинусів із трикутника AMB маємо:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM\cdot BM\cos\alpha = 52 - 48\cos\alpha.$$

Аналогічно з трикутника BMC маємо:

$$BC^2 = BM^2 + MC^2 - 2BM\cdot MC\cos\alpha = 17 - 8\cos\alpha.$$

Відрізки AB і BC рівні як хорди, що стягають рівні дуги, тому віднімемо з першого рівняння друге й одержимо:

$$0=35-40\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{35}{40}=\frac{7}{8}.$$

Таким чином,

$$AB^2=52-48\cos\alpha=52-48\cdot\frac{7}{8}=52-42=10, \qquad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Трикутник AMB, є вписаним у коло, отже, радіус кола можна знайти за допомогою теореми синусів:

$$2R=\frac{AB}{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{10}{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}}.$$

$$R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{10}{\frac{64-49}{64}}}=\sqrt{\frac{10\cdot 64}{15\cdot 4}}=\sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 4\cdot 16}{3\cdot 5\cdot 4}}=\frac{32}{3} \quad \text{Відповідь: } R=\sqrt{\frac{32}{3}}.►$$

<u>Приклад 3.</u> У сектор радіуса R з центральним кутом α вписане коло. Знайти радіус кола.

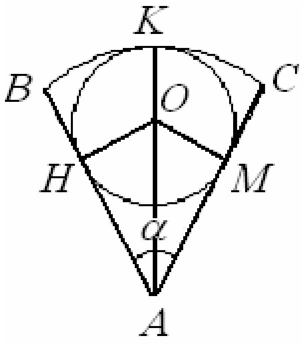


Рис. 1.10. Сектор радіуса R

Дано: $AB=AC=R$, кут $BAC=\alpha$.

Знайти: $OH=r$.

◄ Оскільки центри кругів і точки перетину розташовані на одній прямій, то $AO=R-r$.

Розглянемо трикутник AOH (він прямокутний, тому що кут $OHA=90^0$): кут $HAO=\frac{\alpha}{2}$ з рівності трикутників AOH і AOM (тому що *OH=OM=r, AH=AM* як відрізки дотичних, проведених з однієї точки, сторона AO – спільна).

Оскільки, *синус кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню катета, що розташований напроти гіпотенузи*, маємо:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{OH}{AO}=\frac{r}{R-r} \Rightarrow (\sin\frac{\alpha}{2}\cdot(R-r)=r) \Rightarrow (R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}-r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=r) \Rightarrow$$

$$(R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}+r) \qquad \text{Відповідь: } r=\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}.►$$

<u>Приклад 4.</u> Основи трапеції 5 дм і 40 см. Знайти довжину відрізка, що з'єднує середини діагоналей.

◄ Нехай *ABCD* – трапеція, точка *P* – середина діагоналі *AC*, точка *K* – середина діагоналі *BD*.

Точки *P* й *K* розташовані на середній лінії *EF* трапеції. З того, що *EK* – середня лінія трикутника *ABD,* а *середня лінія трикутника – це відрізок, що з'єднує* *середини двох сторін трикутника, паралельний третій стороні і дорівнює її половині,* випливає, що $EK = \frac{50}{2}$ см $= 25$ см.

Аналогічно, $EP = \frac{40}{2}$ см $= 20$ см, оскільки EP є середньою лінією ΔABC.

Отже, $PK = EK - EP = 25 - 20 = 5$ см. Відповідь: 5 см. ►

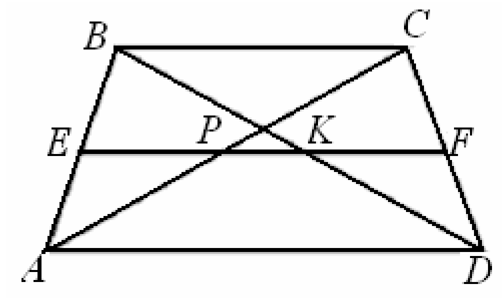


Рис. 1.11. Трапеція *ABCD*

1.4. Індивідуальне завдання № 1.2

Студент повинен розв’язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Знайти:

1. Синус кута B трикутника ABC, якщо $AC = 4$ см, $BC = 5$ см, $\cos A = \frac{2}{9}$;

2. Довжину сторони ромба, якщо довжини діагоналей ромба відносяться як 1:2, а площа ромба дорівнює 12 см;

3. Площу кільця, якщо у коло вписаний правильний трикутник, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2, і в трикутник вписане коло;

4. Площу трикутника ABD, якщо в трикутнику ABC кут при вершині C дорівнює 135^0, $AC = 6$ см, висота $BD = 2$ см;

5. Синус кута A трикутника ABC, якщо $AC = 4$ см, $BC = 7$ см, $AB = 5$ см;

6. Довжину сторони AB трикутника ABC, якщо $BC = 9$ см, $\cos C = \frac{3}{7}$, $\sin A = \frac{2}{3}$;

7. Відстань від центра кола до хорди, яка стягає дугу в 60^0, якщо радіус кола $3\sqrt{27}$ см;

8. Довжину першої діагоналі, якщо друга діагональ паралелограма, довжиною $4\sqrt{6}$ см, утворює з основою кут 60^0, а перша діагональ утворює з тією ж основою кут 45^0;

9. Відстань від центра кола до хорди, якщо в колі, площа якого дорівнює $6{,}25\pi$ см^2, проведена хорда довжиною 3 см;

10. Суму довжин катетів прямокутного трикутника, якщо в трикутнику довжина гіпотенузи дорівнює 20 см, а радіус вписаного кола – 4 см;

11. Довжину сторони ромба, якщо площа ромба дорівнює 18 см^2, а гострий кут 30^0;

12. Відстань між точкою M і основою H висоти CH у прямокутному трикутнику ABC, якщо катет $AC = 7$ см і медіана $CM = 7$ см, проведена до гіпо-

тенузи AB;

13. Відношення у якому поділяє площу трапеції відрізок довжини 5 см, що з'єднує бічні сторони рівнобедреної трапеції, якщо цей відрізок паралельний її основам, рівним 2 см і 7 см;

14. Периметр рівнобедреного трикутника із кутом 120^0, що вписаний у коло радіуса 10 см;

15. Площу спільної частини кіл радіуса 6 см, якщо O_1 і O_2 – центри кіл, $O_1O_2 = 6\sqrt{2}$ см;

16. Площу кола, описаного навколо рівнобедреної трапеції, якщо у цієї трапеції висота дорівнює 14 см, а основи рівні 12 см і 16 см;

17. Периметр квадрата вписаного у прямокутний трикутник із катетами a і b, якщо квадрат має з трикутником спільний прямий кут;

18. Основи рівнобедреної трапеції з бічною стороною, рівною 17 см, що описана навколо кола діаметром 15 см;

19. Довжину відрізка дотичної обмеженою сторонами трикутника, якщо відомо, що дотична проведена до кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою 12 см і висотою 8 см, і паралельна основі трикутника;

20. Довжини сторін AB і AC трикутника ABC, якщо BC = 8 см, а довжини висот, проведених на AC і BC, рівні відповідно 6,4 см і 4 см.

21. Довжину меншої бічної сторони трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см, одна з основ – 8 см, один із кутів трапеції дорівнює 30^0, а прямі, що містять бічні сторони трапеції, перетинаються під прямим кутом;

22. Висоту прямокутного трикутника проведену до гіпотенузи, якщо вона поділяє прямий кут у співвідношенні 1:2, а площа трикутника дорівнює $2\sqrt{3}$ см^2;

23. Площу кола описаного навколо прямокутного трикутника, якшо периметр трикутника дорівнює 24 см, а площа трикутника дорівнює 24 см^2;

24. Радіус меншого кола кругового кільця, якщо його площа дорівнює S, а радіус більшого кола дорівнює довжині меншого кола;

25. Площу прямокутного трикутника, якщо один із його катетів дорівнює 15 см, а радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює 3 см;

26. Довжину гіпотенузи прямокутного трикутника, якщо довжини його сторін утворюють арифметичну прогресію з різницею 1 см;

27. Сторону a трикутника ABC, якщо катети рівні b і c, а кут A удвічі більше кута B;

28. Довжину бісектриси прямого кута, якщо катети прямокутного трикутника рівні b і c;

29. Площу рівнобедреної трапеції, що вписана у коло радіуса 3 см, якщо трапеція має кут при основі $\pi/4$ і висоту $\sqrt{2}$ см;

30. Площу ромба $ABCD$, якщо радіуси кругів, описаних біля трикутників ABC і ABD, відповідно R і r;

31. Площу спільної частини кругів радіусів R і r, якщо відстань між центрами цих двох кругів дорівнює d.

1.5. Алгебраїчні рівняння й нерівності

Рівняння в математиці це аналітичний запис задачі про пошук значень аргументів, при яких значення двох даних функцій рівні. Перша з даних функцій розташована до знаку рівності, друга – після цього знаку. Аргументи, від яких залежать ці функції, називаються звичайно невідомими, а значення невідомих, при яких значення функцій рівні, – розв’язками; про такі значення невідомих говорять, що вони задовольняють даному рівнянню.

Наприклад, $3x–6=0$ є рівнянням з одним невідомим, а $x=2$ є його розв’язком; $x^2 + y^2 = 25$ є рівнянням із двома невідомими, а $x=3$, $y=4$ є одне з його рішень. Сукупність рішень даного рівняння залежить від області M значень, що допускаються для невідомих. Рівняння може не мати рішень в області M, тоді воно називається нерозв'язним в області M. Якщо рівняння розв'язне, то воно може мати одне, два, або навіть безліч рішень.

Для розв’язування **рівнянь** існують певні правила. Наприклад, для квадратного рівняння виду $ax^2+bx+c=0$ пошук розв’язків виконують за виразом:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

При цьому, якщо дискримінант $D=b^2– 4ac$ більше нуля, то $x_1\neq x_2$; якщо D дорівнює нулю, то $x_1=x_2$, а якщо D менше нуля, то дійсних розв’язків немає. Крім того, для розв’язків квадратного рівняння існує *теорема Вієта*, згідно якої:

$$x_1+x_2 = –b/a;\ x_1\cdot x_2 = c/a.$$

Для *зведеного квадратного рівняння* виду $x^2+px+q=0$ пошук розв’язків виконують за виразом:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \text{ або } x_1+x_2 = –p;\ x_1\cdot x_2 = q.$$

Якщо при розв'язуванні рівнянь маємо справу зі степенями й коренями, то бувають корисні такі формули:

$a^p a^q = a^{p+q}$; $\quad a^p b^p = (ab)^p$; $\quad (a^p)^q = a^{pq}$;

$a^0=1$; $a^1=a$; $\quad \sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b}=\sqrt[p]{ab}$; $\quad \sqrt[p]{a}=b\Rightarrow b^p=a$;

$\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$; $\quad a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$; $\quad \dfrac{a^p}{b^p}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^p$;

$\sqrt[p]{\sqrt[g]{a}}=\sqrt[pg]{a}$; $\quad \sqrt[pk]{a^{gk}}=\sqrt[p]{a^g}$; $\quad \sqrt[p]{a^g}=a^{g/p}$;

$a^{1/p}=\sqrt[p]{a}$; $\quad \sqrt[p]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$.

Степені деяких цілих чисел наведені у додатку Б.

Часто бувають корисні формули скороченого множення й розкладання на множники:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $\quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $\quad (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$;

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $\quad (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

Математичні **нерівності** – це співвідношення між числами або величинами, що вказують, які з них більше інших. Для позначення нерівності вживається знак <, звернений вістрям до меншого числа. Так, вираз $2 > 1$ і вираз $1 < 2$ показують теж саме: 2 більше 1, або 1 менше 2. Іноді кілька нерівностей записуються разом (наприклад, $a < b <$ с). Бажаючи виразити, що з двох чисел a і b одне більше (менше) другого, або дорівнює йому, пишуть: $a \geq b$ ($b \leq$ а) і читають: «a більше або дорівнює b» («b менше або дорівнює a»); іноді коротше: «a не менше b» («b не більше a»). Запис $a \neq b$ означає, що числа a і b не рівні, але не вказує, яке з них більше. Усі ці співвідношення також називаються нерівностями.

Нерівності мають багато спільних із рівностями властивостей. Так, нерівність залишається справедливою, якщо до обох її частин додати (або від обох частин відняти) те ж саме число. Так само можна множити обидві частини нерівності на те саме позитивне число. Однак, якщо обидві частини нерівності помножити на негативне число, то зміст нерівності зміниться на зворотний (тобто знак > змінюється на <, а < на >).

З нерівності $A < B$ і $C < D$ випливає $A + C < B + D$ і $A - D < B - C$, тобто однойменні нерівності ($A < B$ і $C < D$) можна почленно складати, а різнойменні нерівності ($A < B$ і $D > C$) – почленно віднімати. Якщо числа A, B, C і D позитивні, то з нерівностей $A < B$ і $C < D$ випливає також $AC < BD$ і $A/D < B/C$, тобто однойменні нерівності (між позитивними числами) можна почленно перемножувати, а різнойменні – почленно ділити.

Нерівності, у які входять величини, що приймають різні числові значення, можуть бути вірні для одних значень цих величин і невірні для інших. Так, нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$ вірна при $x = 4$ і невірна при $x = 2$. Для нерівностей цього типу виникає питання про їхні розв'язки, тобто про визначення границь, у яких варто брати величини, що належать нерівностям, щоб нерівності були справедливі.

Так, переписуючи нерівність $x^2 - 4x + 3 > 0$ у вигляді: $(x - 1)(x - 3) > 0$, зауважують, що вона буде вірна для всіх x, що задовольняють одній з наступних нерівностей: $x < 1$, $x > 3$, що і є розв'язком даної нерівності.

Методом інтервалів вирішуються раціональні або дробово-раціональні нерівності, тобто нерівності типу $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, (де $P(x)$ і $Q(x)$ – багаточлени) або нерівності, що до них зводяться.

Якщо $x_1, \ldots, x_n$ – усі розв'язки багаточленів $P(x)$ і $Q(x)$, розташовані в порядку зростання, то вираз $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (або $P(x) \cdot Q(x)$) не змінює знака на кожному з інтервалів $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, +\infty)$.

Це означає, що коли треба визначити знак виразу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на одному з цих інтервалів, то досить узяти будь-яку точку з цього інтервалу і розглянути значення виразу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в цій точці.

При розв'язуванні показових нерівностей виду $a^{f(x)} >(<)\ a^{\varphi(x)}$ у вигляді:

$$f(x) >(<) \varphi(x)$$

треба мати на увазі: якщо a>1, то знак не змінюється; якщо a<1, то знак змінюється.

В програмі *Maxima* є декілька функцій, що призначені для різноманітних символьних перетворень. Функція `expand` - розкриває дужки й зводить вираз до канонічного виду. Наступний приклад демонструє розкриття дужок:

```
(%i9)  p1:x^2-1;
(%o9)  x^2 - 1

(%i10) p2:x-1;
(%o10) x - 1

(%i11) expand(p1*p2);
(%o11) x^3 - x^2 - x + 1

(%i12) expand((p1+p2)^2);
(%o12) x^4 + 2 x^3 - 3 x^2 - 4 x + 4
```

Функцію `divide` можна використовувати для знаходження частки й решти від ділення одного багаточлена на іншій:

```
(%i13) divide(p1*p2, p1);
(%o13) [x - 1 , 0]
```

Функція `gcd` визначає найбільший загальний дільник багаточленів, а `factor` здійснює розкладання багаточлена на множники:

```
(%i14) gcd(x^3-1, x^2-1, x-1);
(%o14) x - 1

(%i15) factor(x^8-1);
(%o15) (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)
```

Підстановка будь-якого виразу замість змінної здійснюється за допомогою операції =. Наприклад, замінимо всі x на `5/z`:

```
(%i16) x^4+3*x^3-2*x, x=5/z;
```

$$\text{(\%o16)}\quad -\frac{10}{z}+\frac{375}{z^3}+\frac{625}{z^4}$$

Функція `ratsimp` виносить за дужки найбільший загальний дільник:

```
(%i17) ratsimp(%);
```

$$(\%o17)\quad -\frac{10\,z^3-375\,z-625}{z^4}$$

Використовуючи функцію `assume` (to assume - допускати), можна при обчисленнях ураховувати додаткові умови, що задаються нерівностями:

```
(%i18) sqrt(x^2);
(%o18) |x|

(%i19) assume(x<0);
(%o19) [x < 0]

(%i20) sqrt(x^2);
(%o20) -x
```

Функція `forget` (to forget - забувати) знімає всі обмеження, накладені за допомогою `assume`:

```
(%i21) forget(x<0);
(%o21) [x < 0]

(%i22) sqrt(x^2);
(%o22) |x|
```

<u>Приклади</u>

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати нерівність $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(x+3)}\geq 0$.

◄ Позначимо на числовій вісі розв'язки чисельника й знаменника $x_1=-3, x_2=-2, x_3=1$. Вираз $f(x)$ має різні знаки на інтервалах $(-\infty,-3),(-3,-2),(-2,1),(1,+\infty)$. Візьмемо будь-яку точку з інтервалу $(-\infty,-3)$, наприклад $x=-4$, і розглянемо, чому дорівнює $f(-4)$:

$$f(-4)=\frac{(-4-1)\cdot(-4+2)^2}{(-4+3)}=\frac{-5\cdot 4}{-1}=20>0.$$

Звідси випливає, що $f(x)>0$ при усіх $x\in(-\infty,-3)$.

При проходженні через точку x=–3 змінить знак тільки вираз у дужках, що розташован у знаменнику, а знак виразів в інших дужках залишаться без зміни. Отже, $f(x)$ змінить знак і $f(x)<0$ для усіх $x\in(-3,-2)$.

При проходженні через точку x=–2 $f(x)$ не змінить знака, тому що вираз у дужках (x+2) у парній степені, і, отже, значення виразу $(x+2)^2$ не може бути від'ємним.

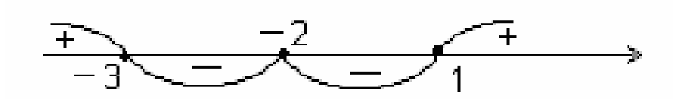


Рис. 1.12. Розв’язок нерівності методом інтервалів

При проходженні через точку x=+1 $f(x)$ знову змінить знак. Треба бути уважним! Зазвичай значення x = –2 втрачають.

Відповідь: $(-\infty,-3)\cup\{-2\}\cup[1,+\infty)$.►

Приклад 2. Розв’язати нерівність $\frac{2}{3x+2}<\frac{3}{2x+5}-3$.

◄ Найпоширеніша помилка – множення на знаменник. Треба пам'ятати, що при множенні нерівності на від’ємне число знак нерівності змінюється.

Перенесемо вираз, що знаходиться в правій частині нерівності, у ліву частину і зведемо до спільного знаменника.

$$\frac{2(2x+5)-3(3x+2)+3(3x+2)(2x+5)}{(3x+2)(2x+5)}<0$$

$$\left\{\frac{18x^2+52x+34}{(3x+2)(2x+5)}<0\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{18(x+1)\left(x+{}^{17}\!/_{19}\right)}{(3x+2)(2x+5)}<0\right\}$$

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a(x-x_1)(x-x_2)=18(x+1)(x+{}^{17}\!/_{9})$$

$$x_{1,2}=\frac{-52\pm\sqrt{52^2-4\cdot18\cdot34}}{2\cdot18}=\frac{-13\pm\sqrt{13^2-9\cdot17}}{9}=\frac{-13\pm4}{9}$$

$$x_1=-{}^{17}\!/_{9};\ x_2=-1$$

Рис. 1.13. Розв’язок нерівності методом інтервалів

Розставляючи знаки як у попередньому прикладі, одержуємо відповідь:

$$x\in\left(-\frac{5}{2},-\frac{17}{9}\right)\cup\left(-1,-\frac{2}{3}\right).►$$

Приклад 3. Розв’язати рівняння: $|3-x|-|x+2|=5$.

◄1 спосіб розв’язування

Розглянемо 4 можливих випадки:

1) $\begin{cases}3-x\geq0\\x+2\geq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq3\\x\geq-2\end{cases}\Rightarrow-2\leq x\leq3$ (ОДЗ).

Рис. 1.14. Область дозволених значень у першому випадку

У першому випадку одержуємо рівняння $3-x-(x+2)=5\Rightarrow x=-2$.

Це значення задовольняє ОДЗ, тому є розв’язком даного рівняння.

2) $\begin{cases} 3-x \ge 0 \\ x+2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x<-2 \end{cases} \Rightarrow x<-2$ (ОДЗ).

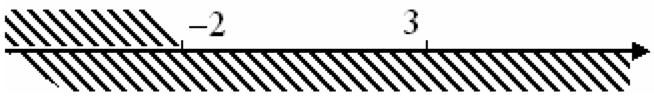


Рис. 1.15. Область дозволених значень у другому випадку

У другому випадку одержуємо рівняння $3-x+x+2=5 \Rightarrow 5=5$. Тут $x \in (-\infty,+\infty)$, але з урахуванням ОДЗ $x<-2$ Розв'язок: $x \in (-\infty,-2)$

3) $\begin{cases} 3-x<0 \\ x+2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x \ge -2 \end{cases} \Rightarrow x \ge 3$ (ОДЗ).

Рис. 1.16. Область дозволених значень у третьому випадку

У третьому випадку одержуємо рівняння $x-3-(x+2)=5 \Rightarrow -5=5$.

Розв'язків немає.

4) $\begin{cases} 3-x<0 \\ x+2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x<-2 \end{cases}$ (ОДЗ).

Рис. 1.17. Область дозволених значень у четвертому випадку

Четвертий випадок не можливий, тому що ОДЗ переривана, а повинна бути безперервною.

Поєднуючи знайдені розв'язки, одержуємо відповідь: $x \le -2$

2 спосіб розв'язування

Цю задачу можна розв'язувати методом інтервалів. Позначимо на числовій вісі розв'язки, при яких вирази з модулем перетворюються в нуль x_1=–2; x_2=3.

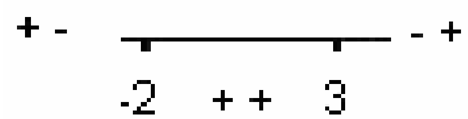


Рис. 1.18. Розв'язок нерівності методом інтервалів

Виберемо з інтервалу (–∞,–2] будь-яку точку, наприклад x=–4, і розглянемо, який знак прийме вираз з модулем: $3-x=3-(-4)=3+4=7>0$, тобто "+" для виразу у перших модульних дужках; $x+2=-4+2=-2<0$, тобто "−" для виразу у других модульних дужках.

Таким чином, на інтервалі (–∞,–2] при розв'язуванні рівняння потрібно вираз у перших модульних дужках відкривати зі знаком «+», а вираз у других модульних дужках зі знаком «–». Тобто:

$3-x-(-(x+2))=5 \Rightarrow \quad 3-x+x+2=5 \Rightarrow \quad 5=5$.

Тут $x \in (-\infty,+\infty)$, але з урахуванням ОДЗ $x \le -2$. Розв'язок: $x \in (-\infty,-2]$.

Аналогічно знаходимо знаки виразів у модульних дужках для інтервалу $x \in (-2, +3)$. Позначимо на числовій вісі ці знаки «+» і «+». Тобто, $3 - x - x - 2 = 5 \Rightarrow x = -2$. Значення $x = -2$ не входить в ОДЗ, тому розв'язків немає.

Аналогічно знаходимо знаки виразів у модульних дужках для інтервалу $x \in [+3, +\infty)$. Позначимо на числовій вісі ці знаки «–» і «+». Тобто:

$-3 + x - x - 2 = 5 \Rightarrow \quad -5 = 5$. Розв'язків немає.

Відповідь: $x \in (-\infty, -2]$.►

<u>Приклад 4.</u> Розв'язати рівняння: $\sqrt{x+2} - x + 1 = 0$.

◄ Знайдемо ОДЗ: $x \geq -2$.

Залишаємо вираз, що містить квадратний корінь, у лівій частині рівняння, а всі інші доданки переносимо в праву: $\sqrt{x+2} = x - 1$.

Підносимо до квадрату: $x + 2 = (x-1)^2$,

Оскільки $\sqrt{x+2} \geq 0$, то для коректності піднесення до квадрату необхідно, щоб $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Таким чином змінюємо ОДЗ: $x \geq 1$.

Одержимо рівняння $x^2 - 3x - 1 = 0$.

Знайдемо його розв'язки: $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 1}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2}\left(3 - \sqrt{13}\right),\ x_2 = \dfrac{1}{2}\left(3 + \sqrt{13}\right)$.

Обидва розв'язки задовольняють ОДЗ, але тільки один $x = \dfrac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$ задовольняє додатковому обмеженню $x \geq 1$.

Відповідь: $x = \dfrac{1}{2}\left(3 + \sqrt{13}\right)$.►

<u>Приклад 5.</u> Розв'язати рівняння: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x+2} = -1$.

◄ Знайдемо ОДЗ: $x \geq -2$.

Переносимо другий вираз, що містить радикал, у праву частину рівняння, а (–1) переносимо в ліву частину:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + 1 = \sqrt{x+2}.$$

Підкореневий вираз представимо у вигляді добутку, для чого знайдемо його розв'язки:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = 3.$$

Тобто, рівняння матиме вигляд: $\sqrt{(x-3)^2} + 1 = \sqrt{x+2}$.

У цьому місці часто допускається типова помилка:

$$\sqrt{(x-3)^2} = x - 3.$$

Насправді правильним буде вираз: $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$.

Необхідно завжди пам'ятати про модульні дужки при розкритті подібних виразів, у противному випадку будуть втрачені розв’язки рівняння.

Таким чином, одержуємо вираз:

$$|x-3|+1=\sqrt{x+2}.$$

Розглянемо два випадки:

1) $x-3\ge 0 \Rightarrow \quad x\ge 3$ (ОДЗ).

Розкриваємо модульні дужки зі знаком "+":

$x-3+1=\sqrt{x+2} \Rightarrow \quad x-2=\sqrt{x+2}$.

Підносимо до квадрату обидві частини рівняння: $(x-2)^2 = x+2$,

Для коректності піднесення до квадрату виразу $\sqrt{x+2}\ge 0$ необхідно, щоб $x-2\ge 0 \Rightarrow \quad x\ge 2$. Це додаткове обмеження не змінює ОДЗ .

Розкриємо вираз у дужках і перенесемо всі доданки з правої частини рівняння в ліву. Одержимо рівняння $x^2-5x+2=0$.

$x_1=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$. Тільки один розв’язок $x_1=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ задовольняє ОДЗ $x\ge 3$.

2) $x-3<0 \Rightarrow \quad x<3$ (ОДЗ).

Розкриваємо вираз у модульних дужках зі знаком "−":

$3-x+1=\sqrt{x+2} \Rightarrow \quad 4-x=\sqrt{x+2}$

Підносимо до квадрату обидві частини рівняння:

$$(4-x)^2 = x+2.$$

Для коректності піднесення до квадрату виразу $\sqrt{x+2}\ge 0$ необхідно, щоб $4-x\ge 0 \Rightarrow \quad x\le 4$. Це додаткове обмеження не змінює ОДЗ .

Розкриємо вираз у дужках і перенесемо всі доданки з правої частини рівняння в ліву. Одержимо рівняння $x^2-9x+14=0$.

$x_1=\dfrac{9+\sqrt{25}}{2}=7$, $x_2=\dfrac{9-\sqrt{25}}{2}=2$. Тільки один розв’язок $x_2=\dfrac{9-\sqrt{25}}{2}=2$ задовольняє ОДЗ $x<3$.

Поєднуємо отримані розв’язки.

Відповідь: $x_1=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}, \quad x_2=2$.►

<u>Приклад 6.</u> Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{2}{3} \\ xy=9 \end{cases}$.

◄ Знайдемо ОДЗ: $x>0,\ y>0$.

З другого рівняння знаходимо $x=\dfrac{9}{y}$ або $\sqrt{x}=\sqrt{\dfrac{9}{y}}=\dfrac{3}{\sqrt{y}}$ і підставляємо в перше: $\left\{\dfrac{\sqrt{y}}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{2}{3}\right\}\Rightarrow\left\{\dfrac{\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}-3-2\cdot\sqrt{y}}{3\cdot\sqrt{y}}=0\right\}\Rightarrow\left\{y-2\sqrt{y}-3=0\right\}$.

Робимо заміну: $t=\sqrt{y}\quad (t>0)$. Одержуємо квадратне рівняння відносно t: $t^2-2t-3=0$.

Одержимо розв'язки: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{\dfrac{4}{4}+3}=1\pm 2$.

$t_1=-1,\ t_2=3$. Але, відповідно до заміни, $t=-1$ не підходить.

Тому $\sqrt{y}=3$. Звідси $y=9,\ x=1$. Відповідь: $(1;\,9)$.►

1.6. Індивідуальне завдання № 1.3

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Спростити вираз:

1. $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}\cdot\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a+b+\sqrt{ab}}$;
2. $\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$;
3. $\dfrac{x^3+5x^2-14x}{x^2+6x-7}$;
4. $\dfrac{a^{5/4}-a^{1/4}}{a^{3/4}+a^{1/2}}:\dfrac{a^{1/2}+1}{a^{1/2}+a^{1/4}}+1$;
5. $\dfrac{\sqrt{(abc+4):a+4\sqrt{b\cdot c:a}}}{\sqrt{abc}+2}:a^{-1/2}$;
6. $\dfrac{x^2+yx-6y^2}{x^2-yx-2y^2}$;
7. $2\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{\sqrt[3]{9x^5}-4x}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3x^2}}$;
8. $\left(\dfrac{m-n}{m^2+mn}+\dfrac{n-m}{m^2-n^2}\right)\cdot(m+n)$;
9. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}\div\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$;
10. $\dfrac{x-1}{x+x^{1/2}+1}\div\dfrac{x^{1/2}+1}{x^{3/2}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$;
11. $\dfrac{a^{5/4}-a^{1/4}}{a^{3/4}+a^{1/2}}:\dfrac{a^{1/2}+1}{a^{1/2}+a^{1/4}}+1$;
12. $\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2a}+2}+\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$;
13. $\dfrac{8x^{-3}+8x^{-2}+2x^{-1}}{0,25x^2+x+1}$.

Знайти суму розв'язків рівняння:

14. $|x+1|=2|x-2|$;
15. $(x-2)^2(x+1)=(1,5x-3)\left(x^2-4\right)$;
16. $x^2-2x=|x-1|$.

Знайти добуток розв'язків рівняння:

17. $2\left(x^2+5\right)-\dfrac{9}{x^2+5}=17$.

Обчислити різницю між найбільшим і найменшим коренями рівняння:

18. $\dfrac{8}{x^2-8}+\dfrac{7}{x^2-7}=-2$;

19. $\dfrac{8}{x^2-8}+\dfrac{7}{x^2-7}=-2$;

20. $x^2+|x|=\dfrac{5}{4}$.

Знайти середнє арифметичне всіх дійсних розв'язків рівняння:

21. $\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{(x+0,5)^2}=5\dfrac{1}{3}$;

22. $(x-3)(x-1)^3+(3-x)(x-2)^3=7(x-3)$.

Звільниться від ірраціональності у знаменнику:

23. $\dfrac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$;

24. $\dfrac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$.

Знайти:

25. Суму кубів дійсних розв'язків рівняння
$\dfrac{1}{x^3+4}-\dfrac{1}{x^3+5}=\dfrac{1}{56}$;

26. Значення виразу $\dfrac{3x-2\sqrt[3]{2y^2}}{\sqrt{3x}+\sqrt[3]{4y}}+\sqrt[3]{4y}$;

27. Значення виразу $\dfrac{3x_0}{x_0^2+8}$,
якщо x_0 – розв'язок рівняння $\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{2x-7}=x-2$;

28. Суму виразів $\sqrt{24-t^2}$ і $\sqrt{8-t^2}$,
якщо відомо, що їхня різниця дорівнює 2
(значення змінної t знаходити не потрібно);

29. Розв'язати рівняння $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{3x+1}{x^2-1}-\dfrac{3}{x+1}=0$;

30. Розв'язати нерівність $\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^3-1\right)}{x^2-2x-3}>0$;

31. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} x^2+6x+5\ge 0 \\ x^2-25\le 0 \\ 2x+11>0. \end{cases}$

1.7. Логарифмічні рівняння й нерівності

Логарифмування – це дія, що полягає у знаходженні *логарифма* числового, алгебраїчного або іншого виразу. Логарифмування – одна з двох дій, зворотних до піднесення до ступеня: якщо $a^b = c$, то $a = \sqrt[b]{c}$ і $b = \log_a c$. В обчислювальній практиці логарифмування вживається для зведення дій множення, ділення, піднесення до ступеня і добування кореня до дій додавання, віднімання, множення і ділення.

Розв'язок логарифмічних рівностей ґрунтується на наступних формулах:

$(\log_a x = b) \Rightarrow (a^b = x)$, де $a > 0$, $a \neq 0$;

$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$, де $x > 0$;

$a^{\log_a x} = x$; $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$;

$\log_{a^m} b = \dfrac{1}{m} \cdot \log_a b = \log_a \sqrt[m]{b}$;

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;

$\log_a \sqrt[m]{b} = \log_{a^m} b$;

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

Для розв'язування логарифмічних нерівностей виду $\log_a f(x) > (<) \log_a \varphi(x)$ необхідно використовувати співвідношення:

ОДЗ: $f(x) > 0$; $\varphi(x) > 0$; $f(x) \neq 1$; $\log_{f(x)} \varphi(x) = a$.

Якщо $a > 1$, то: $f(x) > \varphi(x)$; якщо $0 < a < 1$, то: $f(x) < \varphi(x)$.

Приклади

Приклад 1. Розв'язати нерівність: $0{,}4^{\log_2^2 x + 1} < 6{,}25^{2 - \log_2 x^3}$.

◄ Ураховуючи, що $0{,}4 = \dfrac{2}{5}$ і $6{,}25 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$, зведемо обидві частини нерівності до однієї основи:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2^2 x + 1} < \left(\frac{2}{5}\right)^{-4 + 2 \cdot \log_2 x^3}.$$

Оскільки основа ступеня $0 < \dfrac{2}{5} < 1$, то при переході до нерівності, що має показники ступеня, знак нерівності змінюється: $\log_2^2 x + 1 > 2\log_2 x^3 - 4$.

Функція $\log_2 x$ визначена при $x > 0$, тому, за властивістю логарифму $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$, маємо: $2\log_2 x^3 = 6\log_2 x$.

Перенесемо всі доданки з правої частини рівняння в ліву. Одержимо нерівність: $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 5 > 0$.

Робимо заміну $y=\log_2 x$, приходимо до нерівності:

$y^2-6y+5>0$ $\qquad y_{1,2}=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm 2$.

Рис. 1.19. Розв’язування нерівності методом інтервалів

Методом інтервалів знаходимо змінну y:

$y<1$ і $y>5$.

Таким чином, вихідна нерівність, з урахуванням ОДЗ, рівносильна сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x<1\\ \log_2 x>5\end{array}\right..$$

Оскільки основа логарифма більше одиниці, то: $\left[\begin{array}{l}0<x<2\\ x>2^5\end{array}\right..$

Відповідь: $(0;2)\cup(32;+\infty)$.►

<u>Приклад 2.</u> Знайти область визначення функції: $y=\sqrt{1-\log_8\left(x^2-4x+3\right)}$.

◄ Оскільки логарифмічна функція визначена тільки для додатних чисел, а квадратний корінь – для невід’ємних чисел, то дана задача зводиться до розв’язку системи нерівностей:

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0,\\ 1-\log_8\left(x^2-4x+3\right)\ge 0\end{cases}.$$

Ліву частину першої нерівності розкладемо на множники $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm 1$, а в другій нерівності замінимо 1 на $\log_8 8$:

$$\begin{cases} (x-3)(x-1)>0,\\ \log_8\left(x^2-4x+3\right)\le\log_8 8.\end{cases}$$

Оскільки основа логарифма $8>1$, то, відповідно до властивостей логарифма, переходимо до системи:

$$\begin{cases}(x-3)(x-1)>0,\\ x^2-4x+3\le 8.\end{cases} \text{ або } \begin{cases}(x-3)(x-1)>0,\\ x^2-4x-5\le 0.\end{cases}$$

Ліву частину другої нерівності розкладемо на множники:

$$x_{3,4}=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm 3\Rightarrow\begin{cases}(x-3)(x-1)>0,\\ (x-5)(x+1)\le 0.\end{cases}$$

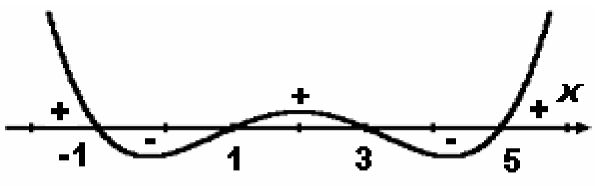


Рис. 1.20. Розв'язок нерівності методом інтервалів

Остання система рівносильна нерівності: $(x-3)(x-1)(x-5)(x+1)\le 0$, (при $x\ne 3$ і $x\ne 1$).

Методом інтервалів одержуємо: $[-1;1)\cup(3;5]$.

Відповідь: $[-1;1)\cup(3;5]$.►

Приклад 3. Розв'язати нерівність:

$$\log_{27}^6 \sqrt{2,5-\frac{x}{6}} - \log_9^6 \sqrt[3]{\frac{x}{25}+0,6} \le 0 .$$

◄ Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} 2,5-\dfrac{x}{6}>0 \\ \dfrac{x}{25}+0,6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15-x>0 \\ x+15>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<15 \\ x>-15 \end{cases}$$

За властивістю логарифму $\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\cdot\log_a b = \log_a \sqrt[m]{b}$; $\log_a \sqrt[m]{b} = \log_{a^m} b$.

Маємо: $\log_{27} \sqrt[2]{2,5-\frac{x}{6}} = \log_{3^3} \sqrt[2]{2,5-\frac{x}{6}} = \log_{3^6}\left(2,5-\frac{x}{6}\right)$;

$$\log_9 \sqrt[3]{\frac{x}{25}+0,6} = \log_{3^2} \sqrt[3]{\frac{x}{25}+0,6} = \log_{3^6}\left(\frac{x}{25}+0,6\right).$$

Тоді вихідну нерівність можна переписати у вигляді:

$$\log_{3^6}^6\left(2,5-\frac{x}{6}\right) \le \log_{3^6}^6\left(\frac{x}{25}+0,6\right),$$

що еквівалентно (у силу парності показника ступеня) нерівності:

$$\left|\log_{3^6}\left(2,5-\frac{x}{6}\right)\right| \le \left|\log_{3^6}\left(\frac{x}{25}+0,6\right)\right|.$$

Остання нерівність, за властивостями модуля, еквівалентна об'єднанню чотирьох систем нерівностей.

Потенціюємо, враховуючи, що $3^6>1$.

$$1)\begin{cases} \log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\ge 0 \\ \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)\ge 0 \\ \log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\le \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,5-\dfrac{x}{6}\ge 1 \\ \dfrac{x}{25}+0,6\ge 1 \\ 2,5-\dfrac{x}{6}\le \dfrac{x}{25}+0,6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 15-x\ge 6 \\ x+15\ge 25 \\ 375-25x\le 6x+90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 9 \\ x\ge 10 \\ x\ge 285/31\approx 9,2 \end{cases} .$$

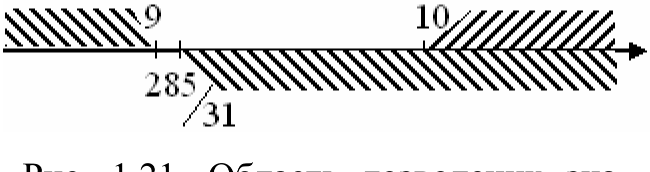


Рис. 1.21. Область дозволених значень у першому випадку

Цей випадок неможливий, оскільки ОДЗ повинна бути безперервною.

$$2)\begin{cases}\log_{3^6}\left(2{,}5-\dfrac{x}{6}\right)<0\\ \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0{,}6\right)<0\\ -\log_{3^6}\left(2{,}5-\dfrac{x}{6}\right)\le-\log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0{,}6\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2{,}5-\dfrac{x}{6}<1\\ \dfrac{x}{25}+0{,}6<1\\ 2{,}5-\dfrac{x}{6}\ge\dfrac{x}{25}+0{,}6\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}15-x<6\\ x+15<25\\ 375-25x\ge 6x+90\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>9\\ x<10\\ x\le 285/31\end{cases}. \qquad 285/31\approx 9{,}2.$$

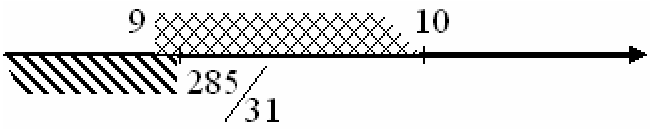


Рис. 1.22. Область дозволених значень у другому випадку

Розв'язком другої системи буде $x\in\left(9;\,285/31\right]$.

$$3)\begin{cases}\log_{3^6}\left(2{,}5-\dfrac{x}{6}\right)<0\\ \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0{,}6\right)\ge 0\\ -\log_{3^6}\left(2{,}5-\dfrac{x}{6}\right)\le\log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0{,}6\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2{,}5-\dfrac{x}{6}<1\\ \dfrac{x}{25}+0{,}6\ge 1\\ \left(2{,}5-\dfrac{x}{6}\right)\left(\dfrac{x}{25}+0{,}6\right)\ge 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}15-x<6\\ x+15\ge 25\\ \dfrac{2{,}5x}{25}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{x^2}{150}-\dfrac{0{,}6x}{6}-1\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>9\\ x\ge 10\\ x^2-75\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>9\\ x\ge 10\\ \left(x-5\sqrt{3}\right)\left(x+5\sqrt{3}\right)\le 0\end{cases}.$$

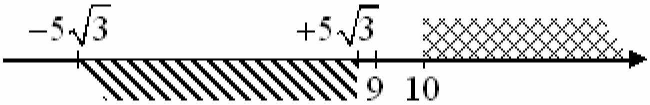


Рис. 1.23. Область дозволених значень у третьому випадку

$5\sqrt{3}\approx 8{,}67$.

Розв'язків немає.

$$4)\begin{cases}\log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\geq 0\\ \log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)<0\\ \log_{3^6}\left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\leq -\log_{3^6}\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2,5-\dfrac{x}{6}\geq 1\\ \dfrac{x}{25}+0,6<1\\ \left(2,5-\dfrac{x}{6}\right)\left(\dfrac{x}{25}+0,6\right)\leq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}15-x\geq 6\\ x+15<25\\ \dfrac{2,5x}{25}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{x^2}{150}-\dfrac{0,6x}{6}-1\leq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 9\\ x<10\\ x^2-75\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 9\\ x<10\\ \left(x-5\sqrt{3}\right)\left(x+5\sqrt{3}\right)\geq 0\end{cases}.$$

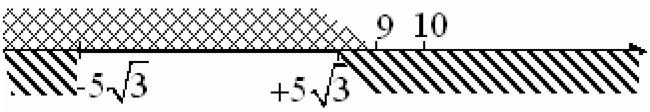


Рис. 1.24. Область дозволених значень у четвертому випадку

Розв'язком четвертої системи буде $x\in\left(-\infty;-5\sqrt{3}\right]\cup\left[5\sqrt{3};9\right]$.

Поєднуючи всі розв'язки, з урахуванням ОДЗ, одержуємо відповідь: $x\in\left[-15;-5\sqrt{3}\right]\cup\left[5\sqrt{3};{}^{285}\!/_{31}\right]$.►

<u>Приклад 4.</u> Розв'язати нерівність $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leq 0$.

◄ Основна ідея розв'язування подібних нерівностей:

$$\left(\log_a u(x)-\log_a v(x)\right)\cdot p(x)\leq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(u(x)-v(x)\right)\cdot p(x)\leq 0\\ u(x)>0\\ v(x)>0\end{cases}.$$

– перехід до основи $a>1$;

– заміна різниці логарифмів різницею відповідних функцій при природних обмеженнях на кожну з них;

– якщо ліва частина нерівності містить у якості співмножника будь-який логарифм (а не різницю двох логарифмів), то для того, щоб застосувати пропоноване перетворення, необхідно представити цей логарифм у вигляді різниці, віднявши від нього нуль, записаний як логарифм одиниці при тій же основі.

$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leq 0\Rightarrow$

Переходимо до основи $a=2$.

$$\frac{\log_2(x+2)}{\log_2(2-x)}\cdot\frac{\log_2(3-x)}{\log_2(x+3)}\leq 0\Rightarrow\frac{\log_2(x+2)-\log_2 1}{\log_2(2-x)-\log_2 1}\cdot\frac{\log_2(3-x)-\log_2 1}{\log_2(x+3)-\log_2 1}\leq 0$$

Застосовуємо пропоноване перетворення:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)-1}{(2-x)-1}\cdot\dfrac{(3-x)-1}{(x+3)-1}\le 0 \\ x+2>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)}{(1-x)}\cdot\dfrac{(2-x)}{(x+2)}\le 0 \\ x>-2 \\ x<3 \end{cases}$$

Остання система легко вирішується методом інтервалів.

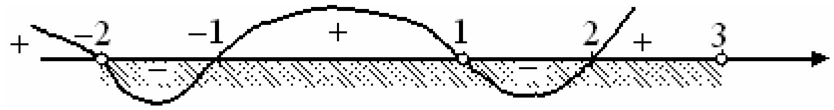


Рис. 1.25. Розв'язок нерівності методом інтервалів

Відповідь: $x\in(-2;-1]\cup(1;2]$.►

Для обчислення натурального логарифма в *Maxima* використовується функція `log`. *Maxima* не має убудованої функції для десятичного логарифма або для інших підстав. Для переходу від однієї підстави логарифма до підстави натурального логарифма використовуємо формулу $\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}=\dfrac{\ln x}{\ln b}$. А для об'єднання логарифмів за формулами $\log_a x^k=k\cdot\log_a x$ і $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ використовується вбудована функція `logcontract`.

```
(%i23) log(%e^2);
(%o23) 2

(%i24) 5*log(a)+6*log(b);
(%o24) 6 log(b)+5 log(a)

(%i25) logcontract(%);
(%o25) log(a^5 b^6)
```

1.8. Індивідуальне завдання № 1.4

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Розв'язати нерівність:

1. $\log_2 x+\log_2(x+1)<\log_2(2x+6)$; 2. $\log_3(x^2-5x+6)<0$;

3. $\log_{1/3}(\log_4(x^2-5))>0$; 4. $\log_x\dfrac{x+3}{x+1}>1$;

5. $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1$;

6. $\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+4}{2x-3} < 0$;

7. $\log_{2x-5}(5x-2) \ge 1$;

8. $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right) \ge \log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right)$

9. $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right) \le 2$;

Розв'язати рівняння:

10. $3\log_5 2+2-x=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right)$;

11. $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$;

12. $\log_{1-x}3-\log_{1-x}2-0,5=0$;

13. $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$;

14. $\log_3(x+6)\cdot\log_x 3=2$;

15. $0,5\left(\lg\left(x^2-55x+90\right)-\lg(x-36)\right)=\lg\sqrt{2}$;

16. $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{\lg x+1}$;

17. $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg\left(35-x^3\right)=0$;

18. $\log_x(2x^2-4x+3)=2$;

19. $\log_2\frac{x-5}{x+5}+\log_2\left(x^2-25\right)=0$;

20. $\frac{\lg 8-\lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}=-1$;

21. $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg\left(27-3^{1/x}\right)$;

22. $4^{\sqrt{x}}-9\cdot 2^{\sqrt{x}-1}+2=0$;

23. $\log^2_{0,5}4x+\log_2\frac{x^2}{8}=8$;

24. $\sqrt{5}\cdot 0,2^{\frac{1}{2x}}-0,04^{1-x}=0$;

25. $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$;

26. $2^{2x+2\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$.

Спростити вираз:

27. $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$;

28. $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}$;

29. $(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8})\cdot 49^{\log_7 2}$.

30. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{1-\log_8\left(x^2-4x+3\right)}$.

31. Обчислити вираз $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}$, якщо $\log_a 27=b$.

1.9. Складання рівнянь

Широко відомі складності щодо розв'язування математичних завдань.

Перша трудність складається в математизації запропонованого тексту, тобто в складанні математичної моделі, що може бути рівнянням, нерівністю або системою рівнянь, діаграмою, графіком, таблицею, функцією тощо. Для того, щоб перекласти зміст завдання на математичну мову, необхідно ретельно вивчити і вірно розтлумачити його, формалізувати питання завдання, виразивши шукані величини через відомі величини і введені змінні.

Друга трудність – складання рівнянь і нерівностей, що пов'язують дані величини і змінні.

Третя трудність – розв'язування отриманої системи рівнянь або нерівностей бажано найбільш раціональним способом.

Скласти рівняння – виразити в математичній формі зв'язок між даними (відомими) і шуканими (невідомими) величинами. Іноді цей зв'язок настільки явно випливає з формулювання завдання, що складання рівняння є просто дослівним переказом завдання мовою математичних знаків.

Частіше, однак, трапляється, що зв'язок між даними і шуканими величинами не вказується в завданні прямо; його потрібно встановити, виходячи з умов завдання. У практичних задачах так буває майже завжди. Тому для складання рівняння не можна дати цілком вичерпних вказівок.

Таким чином, для розв'язування текстового завдання ми перекладаємо його на математичну мову, тобто створюємо математичну модель. Оволодіння навичками математичного моделювання – це найважливіше, що необхідно для складання рівнянь. Адже, як узагалі відбувається переклад з однієї мови на іншу? Ви читаєте текст і відразу викладаєте його іншою мовою. Саме так перекладає досвідчений фахівець легкі текстові завдання на мову математики. Він відразу бачить що саме прийняти за невідомі величини, яким буде рівняння.

Якщо ж зустрілося нелегке завдання, то для перекладу на математичну мову потрібно користуватися наступним. Приймемо за значення шуканої величини (або декількох величин) деяке навмання взяте число (або кілька чисел) і поставимо собі завдання перевірити, чи угадали ми правильний розв`язок завдання чи ні. Якщо ми зуміли провести цю перевірку і знайти, що наша здогадка вірна, або невірна, то ми негайно можемо скласти потрібне рівняння (кілька рівнянь). Отже, запишемо ті самі дії, що ми робили для перевірки, тільки замість навмання взятого числа введемо літеру для невідомої величини. Ми одержимо необхідне рівняння.

Перевірку навмання узятого розв`язку можна робити різними способами; відповідно до цього можна одержати для одного й того ж завдання різні види рівняння; всі вони, однак, дадуть для шуканої величини той самий розв`язок; такі рівняння називаються рівносильними одне до одного.

Зрозуміло, що після одержання навичок у складанні рівнянь немає потреби робити перевірку навмання взятого числа: можна для визначення шуканої величини брати не число, а деяку літеру (x, y тощо) і поводитись так, ніби ця літера (невідома) була тим числом, яке ми збираємося перевірити.

<u>Приклади</u>

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати задачу: Два туристи йдуть назустріч один одному з пунктів A і B. Перший виходить з A на 6 годин пізніше, ніж другий з B, і при зустрічі в пункті C виявляється, що він пройшов на 12 км менше за другого. Продовжуючи після зустрічі шлях з тією ж швидкістю, перший приходить у B через 8 годин після зустрічі, а другий у A – через 9 годин. Визначити відстань

AB і швидкість обох пішоходів.

◄ Нехай v_1, v_2(км/год) – швидкості першого і другого пішоходів, а відстань AB позначимо за S. Зобразимо рух пішоходів графічно.

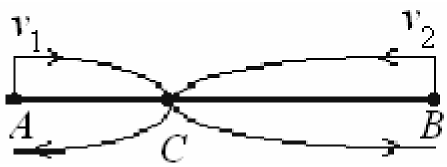


Рис. 1.26. Рух пішоходів

Оскільки ділянку CB перший пройшов за 8 годин, то $BC = 8v_1$. Другий пройшов відстань CA за 9 годин, тому $AC = 9v_2$.

З умови задачі маємо:
$AC + 12 = BC \Rightarrow 9v_2 + 12 = 8v_1$.

Виразимо час, витрачений пішоходами від початку руху до їхньої зустрічі: $t_1 = \dfrac{AC}{v_1} = \dfrac{9v_2}{v_1}$, $t_2 = \dfrac{BC}{v_2} = \dfrac{8v_1}{v_2}$.

Перший вийшов на 6 годин раніше, тому: $t_1 + 6 = t_2 \Rightarrow \dfrac{9v_2}{v_1} + 6 = \dfrac{8v_1}{v_2}$.

Зробимо заміну: $\dfrac{v_2}{v_1} = a$ і розв'яжемо рівняння:

$$9a + 6 = \frac{8}{a} \Rightarrow 9a^2 + 6a - 8 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3},\ a_2 = -\frac{4}{3}.$$

Але a – це відношення швидкостей, а значить його значення більше нуля. Одержимо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{2}{3} \\ 9v_2 - 12 = 8v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 6 \\ v_2 = 4 \end{cases}.$$

Виходить, $S = AC + BC = 9v_2 + 8v_1 = 84$.

Відповідь: $S = 84,\ v_1 = 6,\ v_2 = 4$.►

Приклад 2. Розв'язати задачу: Дві труби, працюючи одночасно, наповнюють басейн за 12 годин. Якщо працює тільки перша труба, то вона наповнює басейн на 10 годин повільніше, ніж тільки друга. За скільки годин наповнює басейн тільки друга труба?

◄ Нехай x (м^3) – об'єм басейну і t (год.) – час наповнення басейну тільки другою трубою. Тоді тільки перша труба наповнить басейн за $t+10$ годин. Знаходимо продуктивність цих труб: $N_2 = \dfrac{x}{t}$, $N_1 = \dfrac{x}{t+10}$. За 12 годин спільної роботи з загальною продуктивністю $N_1 + N_2$ заповнюється весь басейн: $x = \left(\dfrac{x}{t} + \dfrac{x}{t+10}\right) \cdot 12$. Скоротивши на x і перетворивши останнє рівняння отримаємо: $t(t+10) = (2t+10) \cdot 12$. Розкриємо вирази у дужках і перенесемо всі доданки з правої частини рівняння в ліву. Одержимо квадратне рівняння:

$t^2 - 14t - 120 = 0 \Rightarrow t_1 = 20,\ t_2 = -6$.

Оскільки час вимірюяється у позитивних значеннях, то другий корень рівняння не підходить. Відповідь: $t = 20$ год.►

Приклад 3. Розв'язати задачу: В ательє надійшли відрізи чорної, зеленої і синьої тканин. Хоча зеленої тканини було на 9 м менше, ніж чорної, і на 6 м більше, ніж синьої, вартість відрізів була однаковою. Скільки метрів тканини було в кожному відрізі, якщо відомо, що вартість 4,5 м чорної тканини дорівнює загальній вартості 3 м зеленої і 50 см синьої?

◄ Нехай $x_ч,\ x_з,\ x_с$ – кількість чорної, зеленої і синьої тканин відповідно. Відомо: $x_ч - x_з = 9,\ x_з - x_с = 6$. Використовуємо формулу: $C_i = \dfrac{y_i}{x_i}$, де C_i – ціна тканини, y_i – вартість i-го відрізу, x_i – кількість i-ої тканини.

З умови задачі $y_ч = y_з = y_с = y$. Одержимо $C_ч = \dfrac{y}{x_ч},\ C_з = \dfrac{y}{x_з},\ C_с = \dfrac{y}{x_с}$ – ціни тканин. Складемо рівняння, що зв'язує ці вартості:

$$4{,}5C_ч = 3C_з + 0{,}5C_с \Rightarrow \frac{4{,}5y}{x_ч} = \frac{3y}{x_з} + \frac{0{,}5y}{x_с}.$$

Виразимо $x_з$ і $x_с$ через $x_ч$: $x_з = x_ч - 9,\ x_с = x_з - 6 = x_ч - 15$.

Скоротивши на y підставляємо в останнє рівняння:

$$\frac{4{,}5}{x_ч} = \frac{3}{x_ч - 9} + \frac{0{,}5}{x_ч - 15} \Rightarrow x_ч^2 - 58{,}5x_ч + 607{,}5 = 0,$$ причому $x_ч \neq 0;\ 9;\ 15$.

Корені квадратного рівняння: $x_ч = 45, \quad x_ч = 13{,}5$.

Розглянемо обидва випадка:

1. якщо $x_ч = 45$, то $x_з = 36,\ x_с = 30$.
2. якщо $x_ч = 13{,}5$, то $x_з = 4{,}5,\ x_с = -1{,}5$. Другий випадок неможливий, тому що кількість тканини вимірюється у позитивних значеннях.

Відповідь: надійшло 45м чорної, 36м зеленої і 30м синьої тканини. ►

Приклад 4. Знайти розв`язок рівняння $y = x^2 - 58{,}5x + 607{,}5$ створеного у попередньому прикладі.

◄Застосуємо функцію `solve` програми *Maxima*.

```
(%i26) solve([x^2-58.5*x+607.5], [x]);
`rat' replaced 607.5 by 1215/2 = 607.5
`rat' replaced -58.5 by -117/2 = -58.5
```

$$\text{(\%o26)}\quad [x = 45,\ x = \frac{27}{2}]$$

Відповідь: $x_1 = 45, \quad x_2 = 13{,}5$. ►

Контрольні запитання

1. Навести приклади формул зведення й формул скороченого множення.
2. Як знайти розв'язки квадратного рівняння?
3. Написати вираз теореми косинусів?
4. Яка властивість стосується діагоналей паралелограма?
5. Як розв`язуються нерівності методом інтервалів?
6. Як правильно розкрити модульні дужки?
7. Для яких чисел визначена логарифмічна функція?
8. Навести основні властивості логарифмів?

В розділі наведені типові завдання з тригонометрії, планіметрії, а також методи розв'язування алгебраїчних й логарифмічних нерівностей; наведені приклади складання рівнянь.

2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Вивчивши зміст розділу, студент має опанувати основні прийоми розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, як вручну так із застосуванням вільного програмного забезпечення.

2.1. Визначення матриці

Матрицею розміром $m\times n$ називається сукупність $m\cdot n$ чисел, розташованих у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців. Цю таблицю зазвичай беруть у круглі дужки. Наприклад, матриця може мати вигляд:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1/3 & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1{,}5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4), \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Для стислості матрицю можна позначати однією заголовною літерою, наприклад, A або B.

У загальному вигляді матрицю розміром $m\times n$ записують так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, що складають матрицю, називаються *елементами матриці*. Елементи матриці зручно позначати літерою із двома індексами a_{ij}: перший указує номер рядка, а другий – номер стовпця. Наприклад, a_{23} – елемент розташований у 2-му рядку 3-го стовпця.

Приклад

Підприємство, що займається торгово-закупівельною діяльністю, спеціалізується на постачанні мінеральної води. Щотижня в магазин №1 підприємство постачає 500 пляшок «Миргородської», 250 пляшок «Дніпропетровської» і 100 пляшок «Боржомі»; у магазин №2 постачає 100 пляшок «Миргородської», 500 пляшок «Дніпропетровської» і 200 пляшок «Боржомі»; у магазин №3 постачає 250 пляшок «Миргородської», 250 пляшок «Дніпропетровської» і 500 пляшок «Боржомі». За цими даними скласти матрицю поставок.

◄ Опишемо зміст цієї задачі у вигляді матриці порядку 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 500 & 100 & 250 \\ 250 & 500 & 250 \\ 100 & 200 & 500 \end{pmatrix}.$$

Тут елемент a_{ij} означає, що магазин j одержує a пляшок i-ої мінеральної води в тиждень. Наприклад, a_{32} =200 означає, що магазин №2 одержав 200 пляшок «Дніпропетровської» мінеральної води. ►

2.2. Види матриць

Якщо в матриці число рядків дорівнює числу стовпців, то матриця називається *квадратною*, до того ж число її рядків або стовпців називається *порядком* матриці. У наведених вище прикладах квадратними є друга матриця – її порядок дорівнює трьом, і третя матриця – її порядок 1.

Матриця, у якій число рядків не дорівнює числу стовпців, називається *прямокутною*. У прикладах це перша матриця й четверта.

Розрізняються також матриці, що мають тільки один рядок або один стовпець.

Матриця, у якої всього один рядок $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$, називається *матрицею-рядком* (або рядковою), а матриця, у якої усього один стовпець, *матрицею-стовпцем*.

Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовою* й позначається (0), або просто 0. Наприклад,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Головною діагоналлю квадратної матриці назвемо діагональ, що йде з лівого верхнього в правий нижній кут.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що лежать нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *трикутною* матрицею.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця, у якої всі елементи, крім елементів, що розташовані на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається *діагональною* матрицею. Наприклад, $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Зазначимо, що деякі елементи головної діагоналі можуть дорівнювати нулю.

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається *одиничною* матрицею й позначається буквою E. Наприклад, одинична матриця 3-го порядку має вигляд $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Операції над матрицями та їхні основні властивості

Рівність матриць. Дві матриці A і B називаються рівними, якщо ці матриці мають однакове число рядків і стовпців і їхні відповідні елементи дорівнюють $a_{ij} = b_{ij}$. Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A=B$ тільки тоді, коли $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ і $a_{22} = b_{22}$.

Транспонування. Розглянемо довільну матрицю A, що має m рядків і n стовпців. Їй можна поставити у відповідність таку матрицю B з n рядків і m стовпців, що кожен рядок є стовпцем матриці A із тим же номером (отже, кожен стовпець є рядком матриці A із тим же номером). Отже, якщо

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таку матрицю B називають *транспонованою* матрицею A, а перетворення від A до B *транспонуванням*.

Таким чином, транспонування – це зміна ролями рядків і стовпців матриці. Матрицю, транспоновану до матриці A, зазвичай позначають A^{T}.

Зв'язок між матрицею A та її транспонованою можна записати у вигляді:

$$A^{\mathrm{T}}_{ij} = A_{ji}.$$

Операція транспонування матриць має такі властивості:

a) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$
b) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$
c) $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$
d) для симетричної матриці $A^{\mathrm{T}} = A$.

Приклад

Знайти матрицю транспоновану до даної.

◄ $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.►

Додавання матриць. Нехай матриці A і B складаються з однакового числа рядків і однакового числа стовпців, тобто мають однакові розміри. Тоді для того, щоб скласти матриці A і B потрібно до елементів матриці A додати елементи матриці B, що розташовані на тих же самих місцях. Таким чином, сумою двох матриць A і B називається матриця C, що визначається за правилом:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ {}_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix},$$

або

$$\left(c_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right).$$

Приклади

Приклад 1. Знайти суму матриць:

$$◄\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}.►$$

Приклад 2. Знайти суму матриць:

$◄\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ – не можна, тому що розміри матриць різні. ►

Приклад 3. Знайти суму матриць:

$$◄\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\end{pmatrix}.►$$

Легко перевірити, що **додавання матриць** підкоряється комутативному $A+B=B+A$ і асоціативному $(A+B)+C=A+(B+C)$ законам.

Множення матриці на число. Для того щоб помножити матрицю A на число k потрібно кожний елемент матриці A помножити на це число. Таким чином, добуток матриці A на число k є нова матриця, що визначається за правилом $kA=k\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12}\\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22}\\ k\cdot a_{31} & k\cdot a_{32}\end{pmatrix}$ або $\left(c_{ij}\right)=\left(k\cdot a_{ij}\right)$.

Для будь-яких чисел a і b та матриць A і B виконуються рівності:

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A),\qquad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,\qquad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти добуток матриці на число:

$$◄-2\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -6 & 0\\ 2 & -4 & -8\\ -4 & 2 & -6\end{pmatrix}.►$$

Приклад 2. Знайти $2A–B$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

$$◄2A-B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 4 & 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 5 & -4 & -5\end{pmatrix}.►$$

Приклад 3. Знайти $C=-3A+4B$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

◄Цей випадок неможливий – матриці A і B мають різні розміри.►

Приклад 4. Комбінат хлібопродуктів закуповує у двох фермерських господарствах (№1 і №2) зерно пшениці 3, 4, 5 класів відповідно до плану закупівель, що наведений у таблиці 2.1. Знайти кількість зерна пшениці кожного класу, що закуплено комбінатом у фермерських господарствах за 3 місяці.

Таблиця 2.1

План закупівель комбінату хлібопродуктів

Місяць	Постачальники	Кількість пшениці, тонн		
		3 клас	4 клас	5 клас
липень	ф/г №1	1000	2000	1000
	ф/г №2	2000	1000	500
серпень	ф/г №1	1500	2000	1000
	ф/г №2	1800	1500	800
вересень	ф/г №1	1500	2000	1000
	ф/г №2	1800	1500	800

◄ Складемо матрицю закупівлі пшениці в липні: $A=\begin{pmatrix}1000 & 2000 & 1000\\ 2000 & 1000 & 500\end{pmatrix}$. Кількість закупленої пшениці в серпні й у вересні незмінна, тому матрицю закупівлі в ці місяці можна виразити матрицею $B=\begin{pmatrix}1500 & 2000 & 1000\\ 1800 & 1500 & 800\end{pmatrix}$. Кількість зерна пшениці за кожним класом, що закуплено комбінатом у фермерських господарств за 3 місяці можна знайти як $A+2B$.

Розв’яжемо поставлену задачу з використанням програми *Maxima*. Спочатку потрібно ввести матриці A і B, а потім виконати необхідні операції.

Для введення матриць необхідно після привласнення імені через двокрапку написати функцію *matrix*, аргументами якої є рядки матриці, розділені комами.

Для матричних обчислень використовуються наступні символи:

«*» – множення матриці на число, «.» – матричне множення, «+» – сума матриць, «–» – різниця матриць.

```
(%i1) A:matrix([1000,2000,1000],[2000,1000,500]);
```

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix}1000 & 2000 & 1000\\ 2000 & 1000 & 500\end{bmatrix}$$

```
(%i2) B:matrix([1500,2000,1000],[1800,1500,800]);
```

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix}1500 & 2000 & 1000\\ 1800 & 1500 & 800\end{bmatrix}$$

```
(%i3) A+2*B;
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix}4000 & 6000 & 3000\\ 5600 & 4000 & 2100\end{bmatrix}$$

Рис. 2.1. Фрагмент обчислень у *Maxima*

Таким чином, комбінат хлібопродуктів за 3 місяці закупив:
– пшениці 3 класу ф/г №1 – 4000 тн., ф/г №2 – 5600 тн.
– пшениці 4 класу ф/г №1 – 6000 тн., ф/г №2 – 4000 тн.
– пшениці 5 класу ф/г №1 – 3000 тн., ф/г №2 – 2100 тн.

З останньої матриці випливає, що загальну кількість закупленого за 3 місяці зерна у фермерських господарств №1,2, склала:
– пшениця 3 класу – 9600 тн.
– пшениця 4 класу – 10000 тн.
– пшениця 5 класу – 5100 тн.►

Множення матриць. Операція множення матриць здійснюється за своєрідним законом. *Добутком* матриці A на матрицю B називається нова матриця $C=AB$, елементи якої складаються за алгоритмом рис. 2.2:

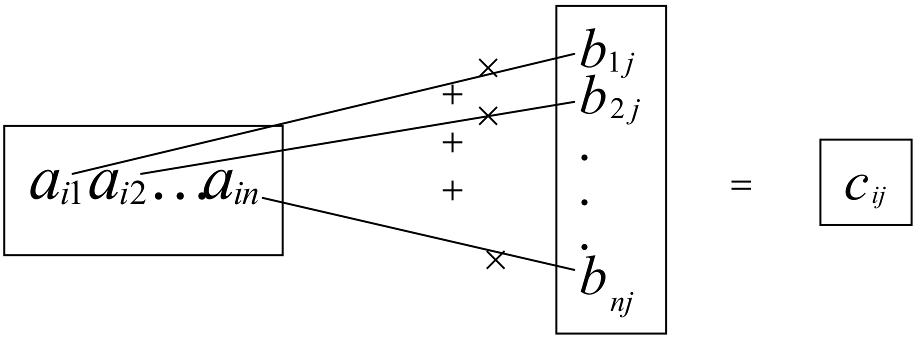


Рис. 2.2. Множення двох матриць

тобто за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}, \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,p}.\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, щоб одержати, наприклад, у матриці-добутку (тобто у матриці C) елемент, що розташований у 1-му рядку й 3-му стовпці c_{13}, потрібно у 1-ій матриці взяти 1-ий рядок, у 2-ій – 3-ій стовпець, і потім елементи рядка помножити на відповідні елементи стовпця й отримані добутки скласти. Інші елементи матриці-добутку знаходять за допомогою аналогічного добутку рядків першої матриці й стовпців другої матриці.

Розміри матриць-співмножників повинні бути погоджені. Перемножувати можна тільки ті матриці, у яких **число стовпців першої матриці збігається із числом рядків другої матриці** (тобто довжина рядка першої дорівнює висоті стовпця другої).

У загальному випадку, якщо ми множимо матрицю $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $n \times p$, то одержимо матрицю C розміру $m \times p$, елементи якої обчислюються у такий спосіб: елемент c_{ij} отримаємо в результаті добутку елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B і додавання отриманих результатів.

Із цього правила випливає, що завжди можна перемножувати дві квадратні матриці одного порядку, у результаті одержимо квадратну матрицю того ж порядку. Зокрема, квадратну матрицю завжди можна помножити саму на себе, тобто піднести у квадрат. Операція множення матриць природним чином поширюється на **випадок декількох множників**. На підставі цього маємо:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n}$$

Іншим важливим випадком є множення матриці-рядка на матрицю-стовпець, причому довжина першої повинна дорівнювати висоті другої матриці, у результаті одержимо матрицю першого порядку (тобто один елемент).

Дійсно, $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{pmatrix}$.

Приклади

Приклад 1. Знайти елементи c_{12}, c_{23} і c_{21} матриці C, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = AB.$$

◄ $c_{12} = 0 - 2 + 3 = 1$, $c_{23} = 0 + 0 + 1 = 1$, $c_{21} = 0 - 3 + 1 = -2$.►

Приклад 2. Знайти добуток матриць:

◄ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 \\ 3+2+2 & 6+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.►

Приклад 3. Знайти добуток матриць:

◄ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2+2 & -3-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \end{pmatrix}$.►

Приклад 4. Знайти добуток матриць:

◄ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ – неможливо знайти розв’язок, тому що довжина першої матриці дорівнює двом елементам, а висота другої – одному. ►

Приклад 5. Знайти AB і BA, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$:

◄ $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.►

Приклад 6. Знайти AB і BA, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

◀ $AB=\begin{pmatrix}-3\\ -7\end{pmatrix}$, $B\cdot A$ – не має змісту. ▶

Приклад 5. Підприємство військово-промислового комплексу випускає продукцію чотирьох видів, при цьому використовує на виготовлення продукції ресурси трьох типів, як показано в таблиці 2.2. Визначити річні потреби підприємства в ресурсах, при відомому випуску продукції.

Таблиця 2.2

Використання ресурсів підприємства на одиницю продукції

Ресурс	Прод.1	Прод.2	Прод.3	Прод.4
Працевитрати, чол./годин	10	10	12	14
Сировина, тн.	78	56	44	14
Фінанси, тис. грн.	42	80	10	53
Кількість продукції, виготовленої за рік, шт.				
	25	16	45	18

◀ Складемо матрицю використання ресурсів на виготовлення одиниці продукції № 1, 2, 3, 4: $A=\begin{pmatrix}10 & 10 & 12 & 14\\ 78 & 56 & 44 & 14\\ 42 & 80 & 10 & 53\end{pmatrix}$.

Матриця випуску продукції буде: $B=\begin{pmatrix}25\\ 16\\ 45\\ 18\end{pmatrix}$.

Річну потребу в ресурсах для виготовлення відомої кількості чотирьох видів продукції знайдемо як добуток матриць $A\cdot B$.

Розв'яжемо поставлену задачу з використанням програми *Maxima.* Для обчислення добутку двох матриць використовується символ «.», тобто крапка.

```
(%i5) A:matrix([10,10,12,14],
               [78,56,44,14],
               [42,80,10,53])$

(%i6) B:matrix([25],[16],[45],[18])$

(%i8) A.B;
      [1202]
(%o8) [5078]
      [3734]
```

Рис. 2.3. Фрагмент обчислень у *Maxima*

Таким чином, річні потреби в ресурсах: трудові – 1202 чол./годин, сировинні – 5078 тн., фінансові – 3734 тис. грн.►

<u>Приклад 2.</u> Комбікормовий завод виробляє комбікорм за трьома рецептами: №1 – для птахів, №2 – для риб і №3 – для свиней. При цьому використовується фуражний ячмінь, фуражна пшениця, пшеничні висівки й зернові відходи. Рецептура виготовлення 1 т кожного виду комбікорму, а також план виробництва й вартість 1 тн. кожного виду сировини наведені в таблиці 2.3. Знайти потреби у сировині для планового випуску комбікормів і загальну вартість сировини.

Таблиця 2.3

Рецептура, план виробництва й вартість 1 тн. кожного виду сировини, що використовує комбікормовий завод

Комбікорми	Норма витрати сировини на 1 тн. продукції, тн.				План випуску, тн.
	ф. ячмінь	ф. пшениця	п. висівки	з. відходи	
рецепт №1	0,3	0,1	0,4	0,2	5400
рецепт №2	0,2	0,2	0,5	0,1	1200
рецепт №3	0,1	0,3	0,3	0,3	9800
Вартість сировини, грн./тн.					
	420	430	100	50	

◄ Норми витрат сировини характеризуються матрицею:

$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,4 & 0,2\\ 0,2 & 0,2 & 0,5 & 0,1\\ 0,1 & 0,3 & 0,3 & 0,3\end{pmatrix}.$$

План випуску комбікормів задано матрицею $B=\begin{pmatrix}5400\\ 1200\\ 9800\end{pmatrix}$.

Вартість кожного виду сировини задано матрицею:

$$C=\begin{pmatrix}420 & 430 & 100 & 50\end{pmatrix}.$$

Для одержання витрат сировини за видами необхідно стовпці матриці A перемножити зі стовпцем B. Це суперечить правилу множення двох матриць. Отже, необхідно попередньо транспонувати матрицю A, а потім знайти добуток $A^{\mathrm{T}}\cdot B$. Позначимо $S=A^{\mathrm{T}}\cdot B$.

Розв'яжемо поставлену задачу з використанням програми *Maxima.* Для знаходження матриці A^{T} (тобто для транспонування матриці) необхідно використати функцію `transpose`, а для обчислення добутку двох матриць використовується символ «`.`», тобто крапка.

Для очищення пам'яті від однакових літер для найменування матриць використовуємо команду `kill(all)`. Для того, щоб не захаращувати екран після введення матриць ставимо знак «$».

Отже, потреби у сировині – 2840 тн. фуражного ячменю, 3720 тн. фуражної пшениці, 5700 тн. пшеничних висівок і 4140 тн. зернових відходів.

Загальну вартість сировини знайдемо як добуток матриць C і S.

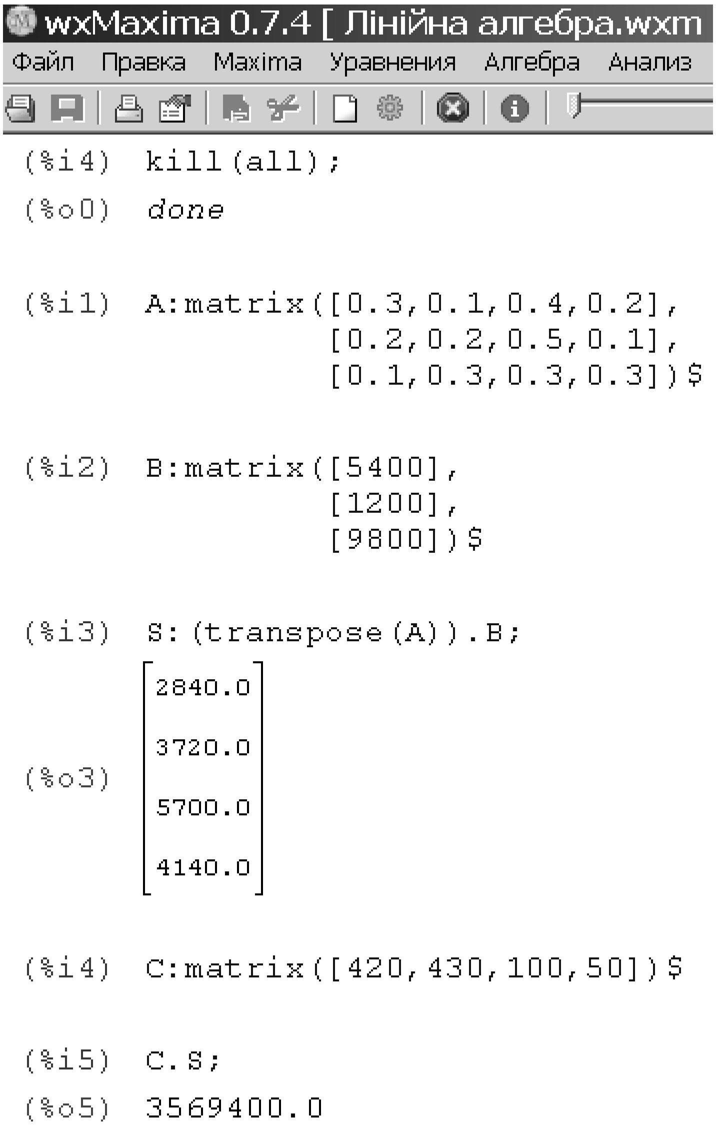


Рис. 2.4. Фрагмент обчислень у *Maxima*

Отже, загальна вартість сировини складає 3569,4 тис. грн. ►

Таким чином, ці прості приклади показують, що матриці, власно кажучи, <u>не переставні</u> одна до одної, тобто $\underline{A\cdot B \neq B\cdot A}$. Тому при множенні матриць потрібно ретельно стежити за порядком множників. Коли $A\cdot B = B\cdot A$, матриці A і B називаються <u>переставними</u> або такими, що комутують між собою.

Можна перевірити, що множення матриць підкоряється асоціативному й дистрибутивному законам, тобто $(AB)C=A(BC)$ і $(A+B)C=AC+BC$.

Легко також перевірити, що при множенні квадратної матриці A на одиничну матрицю E того ж порядку знову одержимо матрицю A, причому $AE=EA=A$.

Можна відзначити наступний цікавий факт. Як відомо, добуток 2-ох відмінних від нуля чисел не дорівнює 0, а добуток 2-ох не нульових матриць може виявитися рівним нульовій матриці.

Наприклад, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, то $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

2.4. Індивідуальне завдання № 2.1

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Виконати дії над матрицями

1. **2(A+B)(2B–A),** де $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

2. **3A–(A+B)B**, де $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$.

3. **2(A–B)(A^2+B),** де $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. **(A^2–B^2)(A+B),** де $A=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. **(A–B^2)(2A+B),** де $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

6. **(A–B)A+2B**, де $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

7. **2(A–0,5B)+AB**, де $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ -4 & -2 & 0 \\ 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.

8. **(A–B)A+3B**, де $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

9. **2A–(A^2+B)B**, де $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

10. **3(A^2–B^2)–2AB^T**, де $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

11. **(2A–B)(3A+B)–2AB**, де $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

12. **A(A–B^2)–2(B^T+A)B**, де $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{bmatrix}$.

13. **(A+B)A–B(2A+3B)**, де $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 11 & 3\\ 1 & 6 & 1\\ 2 & 2 & 16\end{bmatrix}$.

14. **A(2A–B)–B(A–B)**, де $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}9 & 8 & 7\\ 2 & 7 & 3\\ 4 & 3 & 5\end{bmatrix}$.

15. **3(A+B)(AB$^{\mathrm{T}}$–2A)**, де $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & -3 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

16. **2AB–(A+B)(A–B)**, де $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -2 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & -5\end{bmatrix}$.

17. **2A+3B(AB–2A)**, де $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 7 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

18. **(A–B)(A+B)–2A$^{\mathrm{T}}$B**, де $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\\ -1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

19. **2A–AB(B–A)+B**, де $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 5 & 7 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 1 & 4\end{bmatrix}$.

20. **A^2–(A+B)(A–3B)**, де $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

21. **B(A+2B)–3AB**, де $A=\begin{bmatrix}7 & -3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

22. **3(A+B)–(A–B)A**, де $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

23. **A(A–B)+2B(A+B)**, де $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

24. **(2A+B)B–3B**, де $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

25. **AB–2(A$^{\mathrm{T}}$+B)A**, де $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

26. **(A+2B)(3A–B)**, де $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

27. $\mathbf{2A^TB–A(B^T–A)}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

28. **3(A+B)(2B–A)**, де $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

29. **2A(A+B)–3AB**, де $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

30. **3AB+(A–B)(A+2B)**, де $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

31. **2(A–B)+(A+B)A**, де $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 5\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ 0 & 5 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

2.5. Поняття визначника. Методи обчислення визначників

Визначник матриці називають ще **детермінантом**. Для його запису використовують наступні позначення: $|A|$, det A , det (a_{ij}), Δ.

Визначником квадратної матриці другого порядку $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ називається число, що дорівнює $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ й описується символом $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$.
Тобто $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

Отже, для того щоб знайти визначник другого порядку потрібно з добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів другої діагоналі.

Приклади

Обчислити визначники другого порядку:

◄ $\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23$; $\begin{vmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0+6=6$. ►

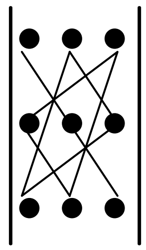
Визначником квадратної матриці третього порядку

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{bmatrix} \text{ називають число: } \begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{13}\cdot a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Для визначника **третього порядку** існують більш наочні правила обчислення визначника, наприклад, правило Сарруса (трикутників) і правило дописування стовпців (рядків). Перші множники – елементи верхнього рядка. Щоб запам'ятати, які добутки варто брати зі знаком «плюс», а які зі знаком «мінус», треба скористатися правилом Сарруса, що схематично зображено нижче:

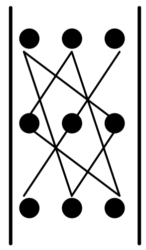
Добутки елементів матриці, що беруться зі знаком «плюс»



$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}.$$

Рис. 2.5. Правило Сарруса для елементів зі знаком «плюс»

Добутки елементів матриці, що беруться зі знаком «мінус»



$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}.$$

Рис. 2.6. Правило Сарруса для елементів зі знаком «мінус»

Той же результат можна одержати дописуванням додаткових стовпців (рядків):

$$\begin{array}{c} + \qquad\qquad\qquad\qquad - \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| \end{array}$$

Рис. 2.7. Правило дописування додаткових стовпців

Приклад

Обчислити визначник третього порядку:

$$◀\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(2\cdot(-2)\cdot 3+3\cdot 1\cdot 1+4\cdot 5\cdot 2)-(4\cdot(-2)\cdot 1+3\cdot 5\cdot 3+2\cdot 1\cdot 2)=$$

$$=(-12+3+40)-(-8+45+4)=31-41=-10.$$

Зробимо перевірку обчислення за допомогою програми *Maxima*, у якій для обчислення визначника матриці використовується функція `determinant`.

```
(%i1) determinant(matrix([2,3,4],
                         [5,-2,1],
                         [1,2,3]));
(%o1) -10
```

Отже, на відміну від матриць, які являють собою таблицю чисел, визначник це число, що певним чином ставиться у відповідність до матриці.

2.6. Властивості визначників

1. Якщо квадратна матриця A^{T} є транспонованою до матриці A, то їхні визначники збігаються $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$, тобто визначник матриці не змінюється, якщо її рядки змінити стовпцями й навпаки, наприклад, для визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановці 2-х рядків або стовпців матриці, її визначник змінить знак на протилежний, зберігаючи абсолютну величину, тобто:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо матриця має два однакові рядки або стовпця, то її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

Дійсно, якщо переставити тут 2-ий і 3-ій рядки, то за властивістю 2 цей визначник повинен змінити знак, але сам визначник у даному випадку не змінюється, тобто одержуємо $|A| = -|A|$ або $|A| = 0$.

4. Загальний множник рядка або стовпця можна виносити за знак визначника (на відміну від матриць, де множення матриці на число k рівносильне множенню всіх елементів матриці на це число):

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Якщо всі елементи будь-якого стовпця матриці дорівнюють нулю, то сам визначник дорівнює нулю.

6. Якщо всі елементи будь-якого рядка або стовпця матриці представлені у вигляді суми 2-х доданків, то визначник можна представити у вигляді суми 2-х визначників за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a'_{32}+a''_{32} & a'_{33}+a''_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a''_{32} & a''_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Якщо до будь-якого рядка (або стовпця) матриці додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на одне й теж число, то визначник не змінить своєї величини:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Визначник діагональної та трикутної матриці дорівнює добуткові елементів, що розташовані на головній діагоналі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} \times a_{33}.$$

2.7. Мінори й алгебраїчні доповнення. Розкладання визначників за елементами рядків і стовпців

Нехай маємо визначник третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Мінором, що відповідає даному елементові a_{ij} визначника третього порядку, називається визначник другого порядку, отриманий із даного викреслюванням рядка й стовпця, на перетині яких розташований даний елемент, тобто i-го рядка й j-го стовпця. Мінори відповідні даному елементові a_{ij} будемо позначати M_{ij}.

Наприклад, мінором M_{12}, що відповідає елементові a_{12}, буде визначник: $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, який отримаємо викреслюванням з даного визначника 1-го рядка і 2-го стовпця.

Якщо формулу для обчислення визначника третього порядку

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

перетворити у вигляд

$$a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}\right),$$

то одержимо визначник, що дорівнює сумі добутків елементів 1-го рядка на відповідні їм мінори; при цьому мінор, що відповідає елементові a_{12}, береться зі знаком «–», тобто можна записати, що:

$$\Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \tag{2.1}$$

Для визначника третього порядку маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, ця формула дає розкладання визначника третього порядку за елементами першого рядка a_{11}, a_{12}, a_{13} і зводить обчислення визначника третього порядку до обчислення визначників другого порядку.

Аналогічно можна ввести поняття мінорів для визначників четвертого, п'ятого й т.д. порядків.

Приклади

Приклад 1. Обчислити визначник третього порядку:

$$◀\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = 3.▶$$

Приклад 2. Обчислити визначник третього порядку:

$$◀\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\cdot 4 = 9.▶$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x+3 & 2+x & 4 \\ 3 & x-1 & 3 \\ 4 & x & 4 \end{vmatrix} = 0.$

$$◀(x+3)\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ x & 4 \end{vmatrix} - (2+x)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 0.$$

$$(x+3)(4x-4-3x)+4(3x-4x+4)=0.$$

$$(x+3)(x-4)+4(-x+4)=0.$$

$$(x-4)(x-1)=0.$$

$$x_1 = 4,\ x_2 = 1.▶$$

Уведемо ще одне поняття.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника називається його мінор M_{ij}, помножений на вираз $(-1)^{i+j}$.

Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} позначається A_{ij}.

З визначення одержуємо, що зв'язок між алгебраїчним доповненням елемента і його мінором виражається рівністю $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, тобто алгебраїчне доповнення – це мінор із відповідним знаком.

Для визначення знака алгебраїчного доповнення можна скористатися нижченаведеною таблицею чергування знаків:

$$\begin{Vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Vmatrix}$$

Рис. 2.8. Правило чергування знаків

Наприклад, $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$; $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$.

Приклад

Дано визначник $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. Знайти алгебраїчні доповнення A_{13}, A_{21}, A_{32}.

◄ $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14$; $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$; $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$.►

Легко помітити, що використовуючи алгебраїчні доповнення елементів, формулу (2.1) можна записати у вигляді:

$$\Delta = a_{11}(-1)^{1+1} M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Аналогічно можна одержати формули для розкладання визначника за елементами будь-якого рядка або стовпця.

Наприклад, розглянемо розкладання визначника за елементами 2-го рядка. Відповідно до другої властивості визначників, при зміні другого й першого рядка матриці визначника місцями, маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Розкладемо отриману матрицю визначника за елементами 1-го рядка.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (2.2)$$

Звідси $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$,

тому що визначники другого порядку у формулі (2.2) є мінори елементів a_{21},

a_{22}, a_{23}.

Таким чином, $\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$, тобто ми одержали формулу для розкладання визначника за елементами 2-го рядка.

Аналогічно можна одержати формули для розкладання визначника за елементами третього рядка. Використовуючи першу властивість визначників (про транспонування), можна показати, що аналогічні розкладання справедливі і при розкладанні за елементами стовпців.

Таким чином, справедливе наступне визначення:

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Це визначення справедливе й для визначників більш високого порядку.

Приклади

Приклад 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами 2-го стовпця.

$$◀\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+2}\cdot 4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-1+9) - 4(6-2) = -24\,.▶$$

Приклад 2. Обчислити визначник 4-го порядку, використовуючи його властивості.

◀ Використовуючи сьому властивість визначників, перетворимо визначник, зробивши у будь-якому рядку або стовпці всі елементи, крім одного, рівними нулю. У даному випадку зручно скласти другий і третій рядки, а потім застосувати розкладання за четвертим стовпцем:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Тепер складемо другий і третій стовпці, а потім застосуємо розкладання за 3-м рядком:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -(-8+8) = 0\,.▶$$

2.8. Індивідуальне завдання № 2.2

Студент повинен розв’язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Обчислити визначник розкладанням за будь-яким рядком, розкладанням за будь-яким стовпцем і використовуючи властивості визначників.

1. $\Delta=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5 & 1\end{bmatrix}.$

2. $\Delta=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 2 & 3\\ 1 & 10 & 3 & 6\\ 6 & 10 & 1 & 4\end{bmatrix}.$

3. $\Delta=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & -1 & -2 & -3\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 2 & 1\end{bmatrix}.$

4. $\Delta=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 3 & 7\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -5 & 4 & 1 & 2\end{bmatrix}.$

5. $\Delta=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & -1.5\end{bmatrix}.$

6. $\Delta=\begin{bmatrix}3 & -2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -1\end{bmatrix}.$

7. $\Delta=\begin{bmatrix}5 & -4 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1 & -6\\ 1 & 0 & 2 & -1\end{bmatrix}.$

8. $\Delta=\begin{bmatrix}4 & -1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -3 & -1\end{bmatrix}.$

9. $\Delta=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & -3 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -10 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 3\end{bmatrix}.$

10. $\Delta=\begin{bmatrix}1 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 5\end{bmatrix}.$

11. $\Delta=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -1 & -3\\ 1 & -1 & 1 & 3\end{bmatrix}.$

12. $\Delta=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 3 & -1\\ 1 & 3 & -8 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -1\end{bmatrix}.$

13. $\Delta=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & -2\end{bmatrix}.$

14. $\Delta=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 3 & 2\\ -2 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 3 & 3\end{bmatrix}.$

15. $\Delta=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 5 & 1\\ -3 & 4 & 10 & 1\\ 0 & -6 & 0 & -1\end{bmatrix}.$

16. $\Delta=\begin{bmatrix}3 & 1 & 3 & 2\\ -2 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 3 & 3\end{bmatrix}.$

17. $\Delta=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}.$

18. $\Delta=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1 & -3\\ 4 & 3 & 2 & -4\end{bmatrix}.$

19. $\Delta=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\3&-1&-1&-2\\2&3&-1&-1\\1&2&3&-1\end{bmatrix}$.

20. $\Delta=\begin{bmatrix}1&4&1&3\\0&-1&3&-1\\3&1&0&2\\1&-2&5&1\end{bmatrix}$.

21. $\Delta=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&3\\3&2&1&2\\4&3&2&1\end{bmatrix}$.

22. $\Delta=\begin{bmatrix}1&1&-3&0\\2&5&1&2\\0&6&4&1\\6&-1&-1&5\end{bmatrix}$.

23. $\Delta=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&-1&1&2\\2&1&-2&-6\\1&-1&1&3\end{bmatrix}$.

24. $\Delta=\begin{bmatrix}2&5&-3&2\\0&-4&5&-2\\1&3&-8&1\\1&-1&2&-1\end{bmatrix}$.

25. $\Delta=\begin{bmatrix}2&1&-3&0\\1&5&1&2\\3&6&4&1\\0&-1&-1&5\end{bmatrix}$.

26. $\Delta=\begin{bmatrix}2&-1&3&2\\3&3&3&2\\3&-1&-1&2\\3&-1&3&-1\end{bmatrix}$.

27. $\Delta=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&-3\\3&2&1&-2\\4&3&2&1\end{bmatrix}$.

28. $\Delta=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}$.

29. $\Delta=\begin{bmatrix}2&1&1&-1\\3&-1&0&-3\\3&0&-1&1\\2&2&-2&5\end{bmatrix}$.

30. $\Delta=\begin{bmatrix}2&1&-3&4\\1&0&-2&3\\3&2&0&-5\\4&3&-5&0\end{bmatrix}$.

31. $\Delta=\begin{bmatrix}3&0&-1&1\\2&1&1&-1\\2&-1&0&-3\\2&2&-2&5\end{bmatrix}$.

2.9. Зворотна матриця

Поняття зворотної матриці вводиться тільки для квадратних матриць.

Якщо A – квадратна матриця, то *зворотною* для неї матрицею називається матриця, що позначається A^{-1} і задовольняє умові:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E\,.$$

Справедлива наступна **теорема**:

Для того щоб квадратна матриця A мала зворотну, необхідно й достатньо, щоб її визначник був відмінний від нуля.

Якщо умови теореми виконані, то матриця зворотна до матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ знаходиться у такий спосіб: $A^{-1}=\dfrac{\tilde{A}}{|A|}$,

де $\widetilde{A}$ – союзна матриця.

Союзна матриця $\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} первинної матриці A.

Для знаходження союзної матриці простіше спочатку транспонувати первинну матрицю A, а потім скласти матрицю з алгебраїчних доповнень уже транспонованої матриці A^{T}.

Отже, щоб знайти зворотну матрицю потрібно:

1. Знайти визначник матриці A;
2. Знайти матрицю транспоновану до первинної;
3. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів транспонованої матриці (одержати союзну матрицю $\widetilde{A}$);
4. Знайти зворотну матрицю за формулою: $A^{-1}=\dfrac{\tilde{A}}{|A|}$.

Аналогічно для матриць другого порядку, зворотною буде наступна матриця $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Зворотна матриця має такі властивості:

1) визначник зворотної матриці A^{-1} дорівнює величині зворотній до визначника заданої матриці A, тобто:

$$\det A^{-1}=1/\det A;$$

2) зворотна матриця добутку матриць дорівнює добуткові зворотних матриць, узятих у зворотному порядку:

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1};$$

3) матриця транспонована до зворотної дорівнює зворотній від транспонованої до даної матриці, тобто:

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти матрицю, зворотну до даної $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку.

◄ Знайдемо визначник первинної матриці: $|A|=2$.

Знайдемо матрицю транспоновану до первинної: $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Знайдемо союзну матрицю: $\tilde{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Знайдемо зворотну матрицю: $A^{-1}=\dfrac{\tilde{A}}{|A|}=\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$.

Перевірка: $A^{-1}\cdot A=E$

$\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$.▶

<u>Приклад 2.</u> Знайти матрицю, зворотну до даної $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

◀ Знайдемо визначник первинної матриці:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3-12=-9.$$

Знайдемо матрицю транспоновану до первинної:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Знайдемо союзну матрицю:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}.$$

Знайдемо зворотну матрицю: $A^{-1}=\dfrac{\tilde{A}}{|A|}=-\dfrac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку обчислення за допомогою програми *Maxima*, у якій для обчислення зворотної матриці матриці використовується функція `invert`. Для того, щоб отримати розв`язок у вигляді добутку співмножника 1/|A| і союзної матриці застосовується функція `detout`.

```
(%i1) invert(matrix([1,2,0],
                    [3,2,1],
                    [0,1,2])),detout;
```

$$\text{(\%o1)}\quad -\frac{\begin{bmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{bmatrix}}{9}$$

▶

2.10. Індивідуальне завдання № 2.3

Студент повинен розв’язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Знайти зворотні матриці

1. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$.

2. $(\mathbf{A}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{B})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 7 & 3\end{bmatrix}$.

3. $(\mathbf{A}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 7\\ -10 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 7 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

4. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}7 & 2 & 0\\ -7 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

5. $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 0\\ 10 & 4 & 1\\ 7 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 6 & -1\\ -1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

6. $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}5 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 7 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

7. $(\mathbf{B}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 16\\ -4 & -2 & 0\\ 6 & 8 & 2\end{bmatrix}$.

8. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 4\end{bmatrix}$.

9. $(\mathbf{A}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{B})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 6 & -2\\ 4 & 10 & 1\\ 2 & 4 & -5\end{bmatrix}$.

10. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 5 & -7 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

11. $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

12. $(\mathbf{B}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{A})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 7 & 13\\ -1 & 0 & 5\\ 5 & 13 & 21\end{bmatrix}$.

13. $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 4 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 11 & 3\\ 1 & 6 & 1\\ 2 & 2 & 16\end{bmatrix}$.

14. $(\mathbf{B}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}9 & 8 & 7\\ 2 & 7 & 3\\ 4 & 3 & 5\end{bmatrix}$.

15. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 0\\ 4 & -3 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

16. $(\mathbf{A}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{B})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -2 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & -5\end{bmatrix}$.

17. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 7 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ -3 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

18. $(\mathbf{A}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\\ -1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

19. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 5 & 7 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 1 & 4\end{bmatrix}$.

20. $(\mathbf{A}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{B})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

21. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}7 & -3 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

22. $(\mathbf{A}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

23. $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

24. $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

25. $(\mathbf{B}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{A})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$.

26. $(\mathbf{B}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

27. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

28. $(\mathbf{A}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{B})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

29. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

30. $(\mathbf{A}^{\mathrm{т}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{т}})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

31. $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{-1}$, де $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 5\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ 0 & 5 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

2.11. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij} і b_i (i=1, …, m; j=1, …, n) – деякі відомі числа, а $x_1, \ldots, x_n$ – невідомі. У позначенні коефіцієнтів a_{ij} перший індекс i позначає номер рівняння, а другий j – номер невідомого, при якому розташований цей коефіцієнт.

Коефіцієнти при невідомих будемо записувати у вигляді матриці $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}$, яку назвемо *матрицею системи*.

Числа, що розташовані в правих частинах рівнянь, $b_1, \ldots, b_m$ називаються *вільними членами.*

Сукупність n чисел $C_1, \ldots, C_n$ називається *розв'язком* системи, якщо кожне рівняння системи обертається у рівність після підстановки у нього чисел $C_1, \ldots, C_n$ замість відповідних невідомих $x_1, \ldots, x_n$.

Наша задача полягає в знаходженні розв'язків системи. При цьому можуть виникнути три ситуації:

1. Система має єдиний розв'язок, наприклад, $\begin{cases}3x_1 + 2x_2 = 11\\ 4x_1 - 2x_2 = 3\end{cases}$.

Розв'язком цієї системи буде єдина пара чисел (x_1=2; x_2=2,5).

2. Система має нескінченну безліч розв'язків, наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$.

Розв'язком цієї системи є будь-яка пара чисел, що відрізняються одне від одного тільки знаком.

3. Система не має розв'язків, наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$.

Якби розв'язок існував, то $x_1 + x_2$ дорівнювало б одночасно нулю й одиниці.

2.12. Правило Крамера для розв'язку СЛАР

Розглянемо систему 3-х лінійних рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Визначник третього порядку, що відповідає матриці системи, тобто складений із коефіцієнтів при невідомих, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ називається *визначником системи*.

Складемо ще три визначники у такий спосіб: замінимо у визначнику Δ послідовно перший, другий і третій стовпці стовпцем вільних членів

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то розглянута система має один і тільки один розв'язок, причому:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Якщо ж визначник системи дорівнює нулю, то система або має нескінченну безліч розв'язків, або не має розв'язків, тобто несумісна.

Після знаходження розв'язків, необхідно зробити перевірку, підставивши знайдені розв'язки в кожне з рівнянь первинної системи.

Приклади

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$.

◄ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 2\cdot 4 - 11 = -8 \neq 0;$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{2} & 2 & -1 \\ \underline{2} & -3 & 2 \\ \underline{8} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 + 28 - 26 = -8;$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \underline{2} & -1 \\ 2 & \underline{2} & 2 \\ 3 & \underline{8} & 1 \end{vmatrix} = -14 + 8 - 10 = -16;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -26 - 20 + 22 = -24 .$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3 .$$

Отже, x=1, y=2, z=3. ►

<u>Приклад 2.</u> Розв'язати систему рівнянь при різних значеннях параметра p: $\begin{cases} px + 30y = p + 30, \\ 30x + py = 0 \end{cases}$.

◄ Система має єдиний розв'язок, якщо $\Delta \neq 0$.

$\Delta = \begin{vmatrix} p & 30 \\ 30 & p \end{vmatrix} = p^2 - 30^2 \neq 0$. Тому $p \neq \pm 30$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} p+30 & 30 \\ 0 & p \end{vmatrix} = p(p+30);\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} p & p+30 \\ 30 & 0 \end{vmatrix} = -30(p+30).$$

1. При $p \neq \pm 30$:

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{p(p+30)}{p^2 - 30^2} = \dfrac{p}{p-30},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-30(p+30)}{p^2-30^2} = \dfrac{-30}{p-30}$, тобто

$$x = \frac{p}{p-30},\ y = \frac{-30}{p-30}.$$

2. При p=30 одержуємо систему рівнянь $\begin{cases} 30x + 30y = 60 \\ 30x + 30y = 0 \end{cases}$, яка не має розв'язків.

3. При p=–30 система має вигляд $\begin{cases} -30x + 30y = 0 \\ 30x - 30y = 0 \end{cases}$ і, отже, має нескінченну безліч розв'язків $x=y$, $y \in R$. ►

<u>Приклад 3.</u> Пекарня випікає хлібобулочні вироби трьох видів, використовуючи при цьому борошно пшеничне трьох сортів. Необхідні характеристики виробництва наведені в таблиці 2.4. Знайти обсяг випуску кожного виду продукції за добу.

Таблиця 2.4

Характеристики виробництва пекарні

Вид сировини	Норма витрат сировини на од. продукції, кг			Витрата сировини за добу, кг
	Батон	Булочка	Хліб	
Вищий сорт	0,2	0,07	0,1	2480
І-сорт	0,1	0,01	0,4	3240
ІІ-сорт	0,05	0,0	0,2	1600

◄ Позначимо через x_1, x_2, x_3 обсяг випуску батонів, булочок і хліба за добу. Тоді, використавши дані таблиці, можна записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,2 \cdot x_1 + 0,07 \cdot x_2 + 0,1 \cdot x_3 = 2480, \\ 0,1 \cdot x_1 + 0,01 \cdot x_2 + 0,4 \cdot x_3 = 3240, \\ 0,05 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0,2 \cdot x_3 = 1600. \end{cases}$$

Розв'яжемо поставлену задачу методом Крамера з використанням програми *Maxima.* Для розв'язку СЛАР за формулами Крамера необхідно спочатку ввести матрицю системи A, а також ввести матриці A_1, A_2, A_3 отримані з матриці системи послідовною заміною першого, другого й третього стовпців стовпцем вільних членів. Використовуючи формули Крамера $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ обчислимо розв`язки рівняння. Для обчислення визначників матриці використовується функція `determinant`.

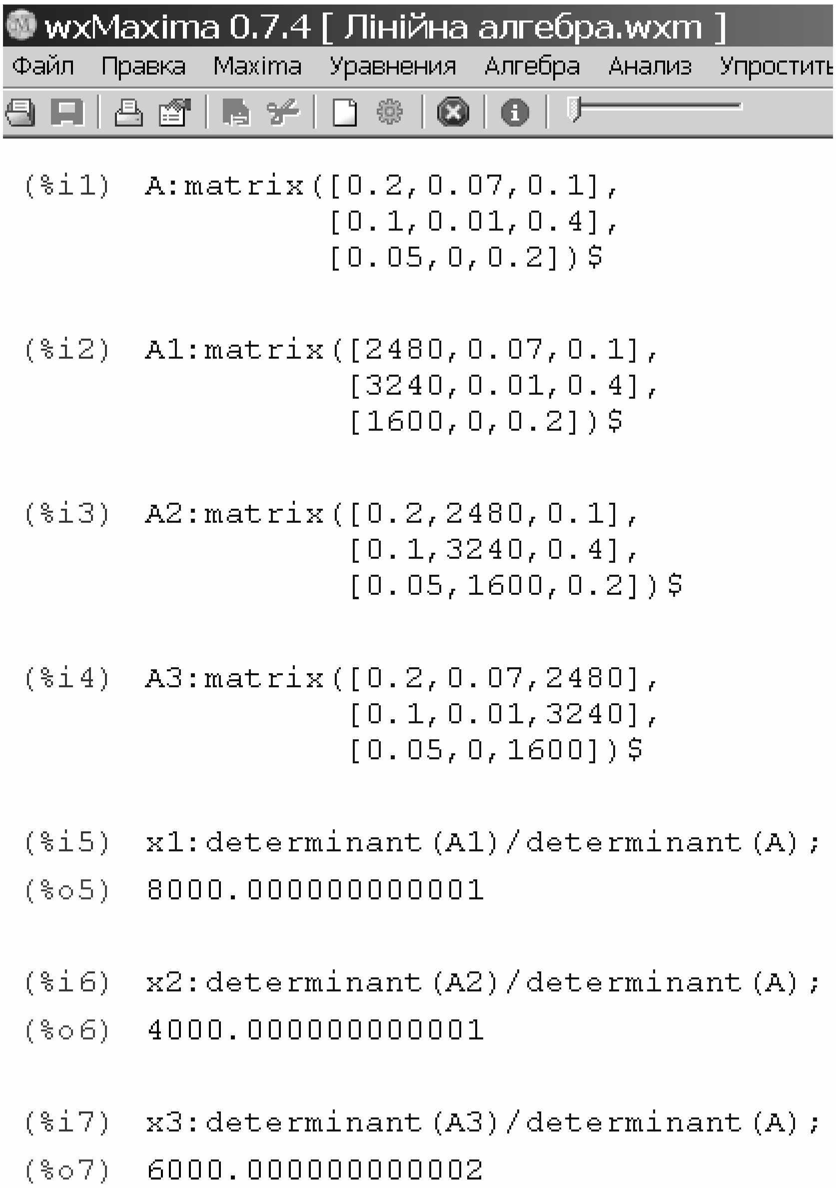


Рис. 2.9. Фрагмент обчислень у *Maxima*

Тобто, за добу пекарня випікає 8000 батонів, 4000 булочок і 6000 буханок хлібу.►

2.13. Розв'язування СЛАР за допомогою зворотної матриці

Нехай дана система із трьох рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Розглянемо матрицю системи $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ і матриці-стовпці невідомих і вільних членів $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Знайдемо добуток $A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$,

тобто в результаті добутку ми одержуємо ліві частини рівнянь даної системи. Користуючись визначенням рівності матриць цю систему можна записати у вигляді:

$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, або у скороченому вигляді $A \cdot X = B$.

Матриці A і B складаються з коефіцієнтів, тому вони відомі, а матриця X невідома. Її елементи є розв'язком даної системи. Це рівняння називають *матричним рівнянням*.

Нехай визначник матриці системи відмінний від нуля $|A| \neq 0$. Тоді матричне рівняння розв'язується у такий спосіб. Помножимо обидві частини рівняння <u>зліва</u> на матрицю A^{-1}, зворотну до матриці A: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, або $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$.

Оскільки $A^{-1}A = E$ і $E \cdot X = X$, то отримаємо розв'язок матричного рівняння у вигляді $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$.

Зауважимо, що оскільки зворотну матрицю можна знайти тільки для квадратних матриць, то матричним методом можна розв'язувати тільки ті системи, у яких <u>число рівнянь збігається із числом невідомих</u>. Після знаходження розв'язків, необхідно зробити перевірку, підставивши знайдені розв'язки в кожне з рівнянь первинної системи.

<u>Приклади</u>

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ x - y = 4 \end{cases}.$$

◄ $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$. $X = A^{-1}B$.

Знайдемо матрицю зворотну до матриці A.

$|A|=-5$, $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $\tilde{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

$X=A^{-1}B=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 4\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-15\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$.

Таким чином, $x = 3$, $y = -1$. ►

Приклад 2. Розв'язати матричне рівняння:

$$XA+B=C,$$

де $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

◄ Виразимо шукану матрицю X із заданого рівняння.

$XA=C-B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Помножимо обидві частини рівняння на матрицю A^{-1} (праворуч до кожної частини рівняння): $XAA^{-1}=(C-B)\cdot A^{-1}$, або $X=(C-B)\cdot A^{-1}$.

Знайдемо матрицю A^{-1}.

$|A|=2\cdot7-3\cdot5=-1$; $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; $\tilde{A}=\begin{pmatrix}7 & -5\\ -3 & 2\end{pmatrix}$;

$A^{-1}=-\begin{pmatrix}7 & -5\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 5\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

$X=(C-B)\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 5\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Перевірка: $XA=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

$XA+B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & -3\end{pmatrix}=C$. ►

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x_1+2x_2=10,\\ 3x_1+2x_2+x_3=23,\\ x_2+2x_3=13.\end{cases}$$

◄ $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}10\\ 23\\ 13\end{pmatrix}$.

Розв'язок будемо шукати у вигляді $X = A^{-1}\cdot B$.

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=3-12=-9$, $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

$\tilde{A}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}$, $A^{-1}=-\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -36 \\ -27 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=4$, $x_2=3$, $x_3=5$.►

Приклад 4. Розв'язати матричне рівняння

$$AX+B=C,$$

де $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

◄ Із рівняння одержуємо $X = A^{-1}(C-B)$.

$$(C-B)=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-7+8=1,\ A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = A^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -12 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}.$$►

Приклад 4. Учасник ринку цінних паперів оцінює прибуток від вкладень свого капіталу в три види акцій за останні три роки. Знайти суми вкладень коштів у кожен із видів акцій, якщо відомі відсоток прибутку за видами акцій і загальний прибуток кожного року окремо (таблиця 2.5).

Таблиця 2.5

Відсоток прибутку за видами акцій і загальний прибуток кожного року окремо

Період	Відсоток прибутку за видами акцій, %			Загальний прибуток, млн. грн.
	Акції 1	Акції 2	Акції 3	
2003 р.	20	22	14	14
2004 р.	18	20	18	14
2005 р.	21	20	15	14

◄ За даними таблиці, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,20\cdot x_1+0,22\cdot x_2+0,14\cdot x_3=14, \\ 0,18\cdot x_1+0,20\cdot x_2+0,18\cdot x_3=14, \\ 0,21\cdot x_1+0,20\cdot x_2+0,15\cdot x_3=14. \end{cases}$$

Розв'яжемо поставлену задачу методом зворотної матриці з використанням програми *Maxima.* Розв'язки матричного рівняння знаходимо за формулою $X = A^{-1}\cdot B$, для чого спочатку вводимо матрицю системі A і матрицю вільних членів B, а потім за допомогою функції `invert` знаходимо суми вкладень коштів у кожен із видів акцій.

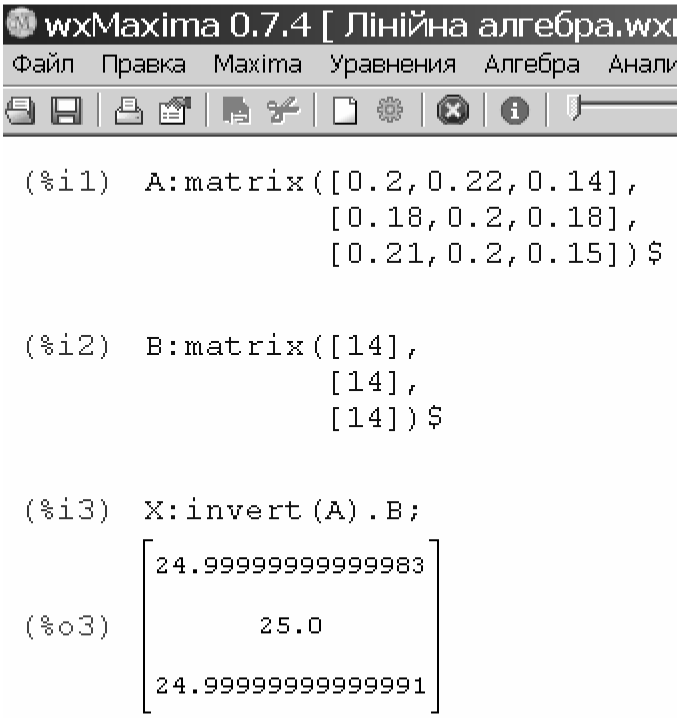


Рис. 2.10. Фрагмент обчислень у *Maxima*

Отже, суми вкладень капіталу, відповідно, у перший, другий та третій вид акцій x_1=25 млн. грн., x_2=25 млн. грн., x_3=25 млн. грн. ►

2.14. Індивідуальне завдання № 2.4

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Розв'язати записані нижче СЛАР:
а) методом Крамера; б) матричним методом.

1. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_2 + 7x_3 = 9. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 - x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 14, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -15, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

2.15. Поняття й знаходження рангу матриці

У цьому розділі розглянемо ще одну важливу числову характеристику матриці, пов'язану з тим, як її рядки (стовпці) залежать один від одного.

Нехай дана матриця A розміром $m \times n$ і число k, яке не перевищуюче найменшого з чисел m і n: $k \le (m,n)$. Виберемо довільно k рядків і k стовпців матриці A (номера рядків можуть відрізнятися від номерів стовпців). Визначник матриці, складеної з елементів, що розташовані на перетині *однакової кількості* k рядків і k стовпців, називається мінором порядку k матриці A.

<u>Приклад</u>

Знайти мінори всіх порядків матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 6 \\ 5 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

◄ Мінором першого порядку (k=1) є будь-який елемент матриці. Так 2, –5, –4 – мінори першого порядку.

Мінори другого порядку (k=2):

- розглянемо перетин рядків 1, 2 і стовпців 1, 2 – одержимо мінор: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$;
- розглянемо перетин рядків 1, 3 і стовпців 2, 4 – одержимо мінор: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -8$;
- розглянемо перетин рядків 2, 3 і стовпців 1, 4 – одержимо мінор: $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -42$.

Мінори третього порядку (k=3). Рядки тут можна вибрати тільки одним способом:

- розглянемо перетин усіх рядків і стовпців 1, 3, 4 – одержимо мінор: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 6 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -4$;
- розглянемо перетин усіх рядків і стовпців 1, 2, 3 – одержимо мінор: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -28$. ►

Якщо всі мінори матриці A порядку k дорівнюють нулю, то всі мінори порядку k+1, якщо такі існують, теж дорівнюють нулю.

Рангом матриці A називається найбільший із порядків мінорів матриці A, відмінних від нуля. Ранг нульової матриці дорівнює нулю.

Єдиного, стандартного позначення рангу матриці не існує. Будемо позначати його **rang** A або **r(**A**).**

Приклади

Приклад 1. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & -5 & 6\\ 5 & -2 & -3 & -4\end{pmatrix}$.

◄ Матриця A має ранг 3, тому що є мінор третього порядку, відмінний від нуля, а мінорів четвертого порядку немає. ►

Приклад 2. Знайти ранг матриці $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

◄ Ранг матриці B дорівнює 1, бо є ненульовий мінор першого порядку (елемент матриці b_{13}), а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю. ►

Приклад 3. Обчислити ранг матриці $C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 8 & 16\\ 8 & 4 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

◄ Оскільки з первинної матриці можна вирізати квадратну підматрицю максимально третього порядку, то перевіримо на рівність нулю, наприклад, підматрицю $\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 4 & 4 & 8\\ 8 & 4 & 0\end{bmatrix}$. Розкладанням за першим рядком маємо:

$$|A|=2\cdot\begin{vmatrix}4 & 8\\ 4 & 0\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}4 & 4\\ 8 & 4\end{vmatrix}=-64-32=-96\neq 0.$$

Тобто ранг даної матриці дорівнює 3.

Зробимо перевірку обчислення за допомогою програми *Maxima*, у якій для обчислення ранг даної матриці використовується функція `rank`.

```
(%i8) rank(matrix([2,0,2,2],
                  [4,4,8,16],
                  [8,4,0,2]));
(%o8) 3
```

►

Ранг невиродженої квадратної матриці порядку n дорівнює n, тому що її визначник є мінором порядку n і у невиродженої матриці відмінний від нуля.

При транспонуванні матриці її ранг не змінюється, тобто:

$$\mathbf{rang}\,A=\mathbf{rang}\,A^{\mathrm{T}}.$$

Розглянемо тепер як рядки (стовпці) матриці **залежать один від одного**.

Нехай є матриця $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$. Ця матриця складається з рядків і стовпців, що називають векторами.

Позначимо вектори-стовпці матриці A_1, A_2, …, A_n. Аналогічно, можна було б позначити вектори-рядки матриці.

Лінійною комбінацією векторів A_1, A_2, …, A_n з дійсними коефіцієнтами λ_1, λ_2, …, λ_n називається сума:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

Система стовпців (рядків) називається **лінійно залежною**, якщо існує такий набір коефіцієнтів, з яких хоча б один відмінний від нуля, при яких лінійна комбінація стовпців (рядків) із цими коефіцієнтами буде дорівнювати нулю, тобто: $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = 0$.

Система стовпців (рядків) є **лінійно незалежною**, якщо лінійна комбінація $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... + \lambda_n A_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ дорівнює нулю (нульовому векторові) тільки тоді, коли всі коефіцієнти λ_1, λ_2,…,λ_n дорівнюють нулю.

Система стовпців (рядків) є **лінійно залежною** тоді й тільки тоді, коли один зі стовпців (один із рядків) є лінійною комбінацією інших стовпців (рядків) цієї системи.

Приклад

Визначити лінійну залежність (незалежність) матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

◄ Позначимо стовпці матриці A_1, A_2, A_3. Тоді при $\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = 1$ одержимо: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, або $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \lambda_3 A_3$. Тобто третій стовпець є лінійною комбінацією двох інших стовпців цієї матриці, а значить матриця є **лінійно залежною.** ►

Ранг матриці дорівнює максимальному числу її стовпців (рядків), що утворюють лінійно незалежну систему. Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то один із його стовпців (один із рядків) є лінійною комбінацією інших стовпців (рядків).

Теорема: Визначник матриці дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли один з її стовпців (один із рядків) є лінійною комбінацією інших стовпців (рядків).

Знаходження рангу матриці за допомогою обчислення всіх її мінорів вимагає занадто великої обчислювальної роботи. Так, наприклад, у квадратній матриці четвертого порядку 36 мінорів другого порядку. Тому для знаходження рангу застосовуються елементарні перетворення матриць:

1) перестановка рядків або стовпців;

2) множення рядка або стовпця на число відмінне від нуля;

3) додавання до одного з рядків іншого рядка, помноженого на число або додавання до одного зі стовпців іншого стовпця, помноженого на число.

Визначення: При елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Алгоритм обчислення рангу матриці схожий на алгоритм обчислення визначника й полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень матриця зводиться до простого вигляду, для якого знайти ранг не завдає клопоту. Оскільки при кожному перетворенні ранг не змінюється, то, обчисливши ранг перетвореної матриці, ми тим самим знаходимо ранг первинної матриці.

Нехай ранг матриці дорівнює r. Тоді будь-який мінор порядку r, відмінний від нуля, називається **базисним мінором**.

<u>Приклад</u>

Знайти ранг і базисні мінори матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

◀ Визначник матриці A дорівнює нулю, тому що третій рядок дорівнює сумі перших двох. Мінор другого порядку, розташований у перших двох рядках перших двох стовпців, дорівнює $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Отже, ранг матриці дорівнює двом, і розглянутий мінор є базисним.

Базисним мінором є також мінор, розташований, скажемо, у першому й третьому рядках, першого й третього стовпців: $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$.

Базисним буде мінор у другому й третьому рядках, першого й третього стовпців: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Мінор у першому й другому рядках, другого й третього стовпців $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ дорівнює нулю і тому не буде базисним. ▶

Теорема про базисний мінор: Кожен рядок (стовпець) матриці є лінійною комбінацією рядків (стовпців), що проходять через базисний мінор.

2.16. Умови існування розв'язку СЛАР загального вигляду. Теореми Кронекера-Капеллі

СЛАР називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною – у випадку, коли розв'язків у системи немає.

Питання про те, має система розв'язок чи ні, пов'язане не тільки зі співвідношенням числа рівнянь і числа невідомих n. Наприклад, система із трьох рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

має розв'язок x_1=2, x_2=–1 і навіть має нескінченно багато розв'язків, а система із двох рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

розв'язків не має, тобто є несумісною.

Будемо називати **розширеною матрицею** системи лінійних рівнянь матрицю A^*, що відрізняється від матриці A системи наявністю додаткового стовпця з вільних членів:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Зауважимо, що ранг розширеної матриці A^* або дорівнює рангові матриці системи A, або більше нього на одиницю.

Тоді, відповідь на питання про сумісність і визначеність довільної системи рівнянь дають наведені нижче теореми Кронекера-Капеллі.

Теорема Кронекера-Капеллі I (умова сумісності). Система лінійних рівнянь є сумісною тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи A дорівнює рангові розширеної матриці A^*. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має при цьому хоча б один розв'язок.

У системі $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$ rang A = rang A^* = 1 і система є сумісною.

У системі $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ rang A = 1; rang A^* = 2. Тобто ранг матриці системи не дорівнює рангові розширеної матриці й, за теоремою Кронекера-Капеллі, система є несумісною.

Теорема Кронекера-Капеллі II (умова визначеності).

Сумісна система є визначеною, якщо ранг матриці A системи дорівнює кількості невідомих: rang A = rang A^* = n.

Система при цьому має один єдиний розв'язок. Якщо ж rang $A < n$, то система має безліч розв'язків.

Хоча теореми Кронекера-Капеллі дають можливість визначити, чи є система сумісною й визначеною, застосовуються вони досить рідко, в основному в теоретичних дослідженнях. Причина полягає в тім, що обчислення при знаходженні рангу матриці збігаються з обчисленнями при знаходженні розв'язку системи, наприклад, за методом Гаусса (див. п. 2.20). Тому, замість того, щоб знаходити ранги шукають розв'язок системи. Якщо його вдається знайти, то дізнаються, що система сумісна й одночасно одержують її розв'язки. Якщо розв'язок не вдається знайти, то робимо висновок, що система несумісна.

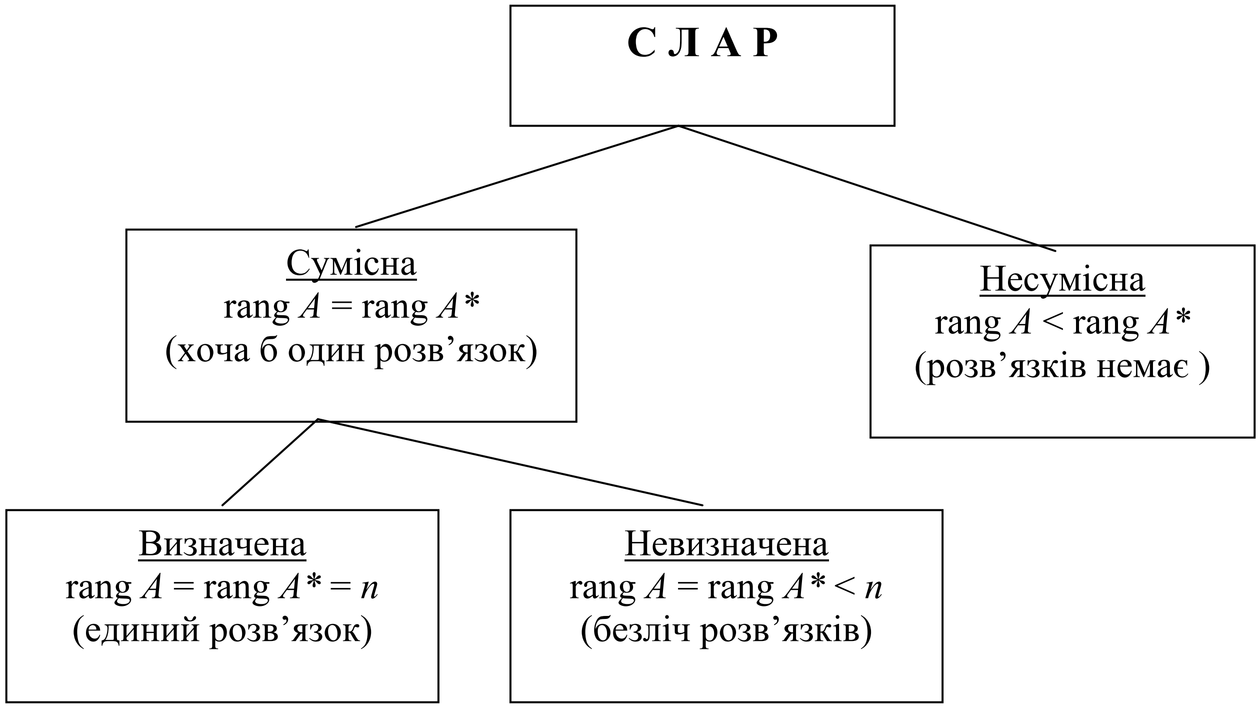


Рис. 2.11. Умови сумісності та визначеності
за теоремами Кронекера-Капеллі

Приклади

Приклад 1. За допомогою теореми Кронекера-Капеллі визначити, чи має розв'язки система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2, \\ 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 7. \end{cases}$$

◄ Позначимо рядки матриці $l_1,\ l_2,\ l_3$. Запишемо розширену матрицю заданої системи й знайдемо rang A і rang A*. Для цього, використовуючи властивості матриць, зведемо матрицю до трапецеїдального вигляду:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \\ 4 & 7 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - l_1/2 \\ l_3 - 2l_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 13 & -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ l_3 - 2l_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут rang A = rang A* = 2, а кількість невідомих n = 3. Тому система є сумісною, невизначеною і має безліч розв'язків.►

Приклад 2. За допомогою теореми Кронекера-Капеллі визначити, чи має розв'язки система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2, \\ 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$$

◄ Запишемо розширену матрицю заданої системи й знайдемо rang A і rang A*:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \\ 4 & 7 & -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - l_1/2 \\ l_3 - 2l_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 13 & -13 & 1 \end{bmatrix}_{l_3-2l_2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут rang A = rang A^* = 3 = n. Тому система є не тільки сумісною, але і визначеною і має єдиний розв'язок.►

Приклад 3. За допомогою теореми Кронекера-Капеллі визначити, чи має розв'язки система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2, \\ 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases}$$

◄ Запишемо розширену матрицю заданої системи й знайдемо rang A і rang A^*:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \\ 4 & 7 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - l_1/2 \\ l_3 - 2l_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 13 & -12 & 2 \end{bmatrix}_{l_3-2l_2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6{,}5 & -6 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тут rang A = 2, а rang A^* = 3. Тому розглянута система не є сумісною. Вона не має розв'язків.►

2.17. Індивідуальне завдання № 2.5

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Використовуючи I і II теореми Кронекера-Капеллі або метод Гаусса (див. п.2.20 на стор. 93) визначити системи лінійних алгебраїчних рівнянь на можливість розв'язання. Розв'язати сумісні СЛАР.

1. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 8x_1 + x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 2, \\ -5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 13x_3 = 5. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 11x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 9x_3 = 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -2x_1-2x_2+x_3=3, \\ -2x_1+x_2+x_3=1, \\ -x_1-x_2+x_3=2. \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+x_2-x_3=1, \\ -x_1+2x_2=3. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=1, \\ -x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1-2x_2=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1-x_2-x_3=1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2, \\ x_1+x_2-2x_3=1, \\ 3_1+x_2-5x_3=4. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=2, \\ x_1-x_2-x_3=0, \\ 3x_1-4x_2-4x_3=5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=1, \\ 3x_1+x_2-5x_3=-4, \\ 5x_1-2x_2-x_3=-3. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-1, \\ 5x_1-x_2+3x_3=1. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 5x_1-x_2+3x_3=2, \\ 7x_1-4x_2+7x_3=1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=10, \\ 2x_1+x_2+3x_3=8, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=-2. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=-3, \\ 4x_1+4x_2+5x_3=3. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3=-1, \\ x_1-2x_2+x_3=8, \\ 3x_1+x_2+3x_3=5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2, \\ 2x_1-x_2-2x_3=-1, \\ 5x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+3x_3=2. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3=-1, \\ -x_1+x_2+2x_3=1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-x_3=3, \\ 4x_1+5x_2-2x_3=8. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=2, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=3, \\ 5x_1+7x_2+3x_3=5. \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1+5x_2-2x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=4, \\ 6x_1+8x_2+2x_3=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=3, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-7, \\ 5x_1-4x_3=1. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=2, \\ 3x_1+x_2-x_3=-1, \\ 5x_1-4x_3=1. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-9, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \\ 3x_1+x_2-x_3=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=4, \\ 5x_1+x_2+3x_3=2, \\ 8x_1+2x_2+x_3=6. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=4, \\ 2x_1-3x_2+x_3=9, \\ 5x_1+x_2+3x_3=-4. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=9, \\ 3x_1+x_2-2x_{3,}=4 \\ 5x_1-2x_2-x_3=3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4, \\ x_1+3x_2-x_3=2, \\ 5x_1+2x_2+x_3=5. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=4, \\ x_1+3x_2-x_3=3, \\ 4x_1+5x_2+x_3=10. \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1-x_2+3x_3=2, \\ 7x_1+x_2+4x_3=3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=5, \\ 2x_1-x_2-x_3=4, \\ x_1+5x_2-x_3=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5, \\ 4x_1+x_2+3x_3=7. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ x_1+5x_2-x_3=2, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-4x_3=5, \\ 2x_1+x_2+4x_3=3, \\ 5x_1+5x_2-x_3=0. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=7, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8, \\ 5x_1+5x_2-x_3=-1. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=7, \\ 2x_1-x_2-3x_3=3, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7x_1+5x_2+2x_3=9, \\ x_1-x_2-x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+x_3=5. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=2, \\ 7x_1+5x_2+2x_3=9, \\ 8x_1+6x_2+4x_3=5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 8x_1-5x_2-x_3=5, \\ -4x_1+7x_2-x_3=10, \\ -4x_1+x_2+5x_3=3. \end{cases}$ $\begin{cases} 8x_1-5x_2-x_3=5, \\ -4x_1+x_2+5x_3=3, \\ 4x_1-4x_2+4_3=8. \end{cases}$ $\begin{cases} -4x_1+x_2+5x_3=3, \\ 8x_1-5x_2-x_3=4, \\ 4x_1-4x_2+4x_3=3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3=2, \\ 4x_1+2x_2=3, \\ x_1+x_2+2x_3=-3. \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1+2x_2=3, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=2, \\ x_1+5x_3=1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=2, \\ 4x_1+3x_2-3x_3=7. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=2, \\ 5x_1+5x_2-x_3=6. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=3, \\ 2x_1+x_2+4x_3=7, \\ 4x_1+x_3=10. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=7, \\ 2x_1-x_2-3x_3=3, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=7, \\ 2x_1-x_2-x_3=5, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=7. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=3, \\ x_1+5x_2-x_3=5, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=8. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=5, \\ x_1+5x_2-x_3=7, \\ 2x_1-7x_2+5x_3=1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1-2x_2-2x_3=3, \\ 2x_1-5x_2-4x_3=4. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-2x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2-2x_3=0, \\ x_1-x_2-x_3=1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2, \\ x_1+x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-3x_3=5. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 7x_1+5x_2+2x_3=14, \\ x_1-x_2-x_3=-1, \\ x_1+x_2+2x_3=4. \end{cases}$ $\begin{cases} 7x_1+5x_2+2x_3=14, \\ x_1-x_2-x_3=-1, \\ 8x_1+4x_2+x_3=13. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-2x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=4, \\ 3x_1-x_2=5. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=6, \\ 3x_1-x_2+x_3=4. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ 3x_1-x_2+x_3=4, \\ 4x_1+2x_2=10. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=4, \\ 2x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1-2x_2=1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-1, \\ x_1+5x_2+x_3=6. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ x_1+5x_2+x_3=6, \\ 2x_1-x_2+x_3=2. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-1, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 5x_1+3x_2-x_3=2. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ x_1+x_2+2x_3=-1, \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2, \\ -2x_1-2x_2-2x_3=-8. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1-x_2-6x_3=-1, \\ 3x_1-2x_2=8. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1-2x_2=8, \\ x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1-3x_2-x_3=6. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-6x_3=-1, \\ 3x_1-2x_2=8, \\ -x_1+x_2-6x_3=5. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ -2x_1+x_2-x_3=5. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-x_2-3x_3=-1, \\ x_1+5x_2+x_3=0. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-1, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 5x_1+3x_2-x_3=7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1+5x_2+x_3=-7, \\ x_1-2x_2-x_3=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=-7, \\ 2x_1-x_2-3x_3=0, \\ 3x_1+4x_2=2. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=2, \\ x_1+5x_2+x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2=-5. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1-x_2+5x_3=7, \\ x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=1. \end{cases}$ $\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3=12, \\ x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=1, \\ 3x_1-x_2+5x_3=2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=11, \\ 2x_1-x_2-x_3=4, \\ x_1-x_2+5x_3=7. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 5x_1+3x_2-3x_3=7. \end{cases}$

2.18. Однорідна система рівнянь. Фундаментальна система. Загальний розв'язок системи

Система m лінійних рівнянь з n змінними називається системою лінійних *однорідних* рівнянь, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю. Така система має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Система лінійних *однорідних* рівнянь завжди є сумісною, тому що вона завжди має, принаймні, нульовий (або тривіальний) розв'язок $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$. У цьому розділі ми будемо використовувати матричний запис системи: $A \cdot X = 0$, де A – матриця коефіцієнтів при змінних, або *матриця системи*.

Якщо у системі $m = n$, а її визначник відмінний від нуля, то така система має тільки нульовий розв'язок, як це випливає з теореми й формул Крамера. Дійсно, за формулами Крамера розв'язки системи однозначно визначаються формулою $x_j = \dfrac{|A_j|}{|A|}$ (j=1, 2, …, n). Знаменник – це визначник матриці системи $|A| \neq 0$, а чисельник – визначник, матриця якого виходить з матриці системи заміною її j стовпця на стовпець вільних членів (зі збереженням без зміни всіх інших стовпців). Оскільки у однорідній системі стовпець вільних членів дорівнює нулю, то із властивостей визначників – усі визначники $|A_j|$ дорівнюють нулю, і, відповідно, усі розв'язки системи теж дорівнюють нулю.

Приклад

Знайти розв'язок СЛАР $\begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x + 2y + z = 0, \\ 4x + 11y - z = 0 \end{cases}$

◄ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, тобто $x = y = z = 0$.►

Теорема. Для того, щоб система лінійних однорідних рівнянь мала ненульовий розв'язок, необхідно й достатньо, щоб $\Delta \neq 0$.

Отже, якщо визначник $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Якщо ж Δ=0, то система лінійних однорідних рівнянь має безліч розв'язків.

Отже, ненульові розв'язки можливі лише для таких систем лінійних однорідних рівнянь, у яких число рівнянь не більше числа змінних, коли визначник системи дорівнює нулю. Інакше: *система лінійних однорідних рівнянь має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи менш ніж число змінних, тобто при* $\mathrm{rang}\,A < n$. Якщо однорідна система лінійних рівнянь має ненульовий розв'язок, то вона має безліч розв'язків.

Позначимо будь-які ненульові розв'язки системи у вигляді векторів-стовпців $X_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix}$.

Сформулюємо дві основні властивості розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь:

1. Розв'язок, помножений на число, теж є розв'язком. Наприклад, $\lambda X_1 = \begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \\ \dots \\ \lambda p_n \end{pmatrix}$ – теж розв'язок системи.

2. Сума розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь є розв'язком цієї системи.

Переконатися в справедливості зазначених властивостей можна безпосередньою підстановкою їх у рівняння системи.

Визначення: Набір розв'язків X_1, X_2, …, X_k однорідної системи рівнянь називається **фундаментальною системою розв'язків** лінійної системи рівнянь.

Інакше: розв'язки X_1, X_2, …, X_k системи $AX = 0$ утворюють ***фундаментальну систему розв'язків****, якщо стовпці* X_1, X_2, …, X_k *утворюють лінійно незалежну систему і будь-який розв'язок системи є лінійною комбінацією цих стовпців.*

Визначення: Нехай X_1, X_2, …, X_k – фундаментальна система розв'язків однорідної системи $A \cdot X = 0$. Тоді вираз $X = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_3 + \ldots + C_k \cdot X_k$, де $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – довільні числа, будемо називати **загальним розв'язком системи** $AX = 0$.

З визначення фундаментальної системи розв'язків випливає, що будь-який розв'язок однорідної системи може бути отриманий із загального розв'язку при деяких значеннях $C_1, C_2, \ldots, C_k$. І навпаки, за будь-яких фіксованих числових значень $C_1, C_2, \ldots, C_k$ із загального розв'язку одержимо розв'язок однорідної системи.

Теорема: Нехай X_1, X_2, …, X_k – фундаментальна система розв'язків однорідної системи $A \cdot X = 0$. Позначимо через k – число розв'язків цієї фундаментальної системи. Тоді $\mathrm{rang}\,A + k = n$, де n – число невідомих у системі. І навпаки, усяка фундаментальна система розв'язків складається з k розв'язків, причому, $k = n - \mathrm{rang}\,A$.

2.19. Структура розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь

Нехай дана система m неоднорідних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}.$$

У матричному вигляді таку систему запишемо як $A \cdot X = B$, де матриця A має розміри $m \times n$.

Нехай c і d – розв'язки неоднорідної системи $A \cdot X = B$. Тоді їх різниця $g=c-d$ є розв'язком однорідної системи з тією ж матрицею, тобто розв'язком системи $A \cdot X = 0$.

Нехай c – розв'язок неоднорідної системи $A \cdot X = B$, g – будь-який розв'язок однорідної системи $A \cdot X = 0$. Тоді $d=c+g$ – розв'язок неоднорідної системи.

Визначення. Нехай X_0 – деякий розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь $A \cdot X = B$, z – загальний розв'язок однорідної системи $A \cdot X = 0$. Тоді вираз $X=X_0+z$ називається **загальним розв'язком неоднорідної системи**.

З огляду на запис загального розв'язку однорідної системи через фундаментальну систему її розв'язків X_1, X_2, …, X_k одержуємо формулу для загального розв'язку неоднорідної системи:

$$X = X_0 + C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_3 + \ldots + C_k \cdot X_k.$$

Інакше, *загальний розв'язок системи m лінійних рівнянь з n змінними дорівнює сумі загального розв'язку відповідної їй системи однорідних лінійних рівнянь і довільного частинного розв'язку цієї системи*.

Із двох останніх тверджень випливає, що будь-який розв'язок неоднорідної системи може бути отриманий із загального розв'язку при деяких числових значеннях коефіцієнтів $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Теорема. Система лінійних рівнянь $A \cdot X = B$ може мати або безліч розв'язків, або один розв'язок, або не мати розв'язків.

2.20. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Нехай дана система m лінійних рівнянь з n невідомими $A \cdot X = B$. Потрібно знайти її загальний розв'язок, якщо вона сумісна, або встановити її несумісність.

Назвемо елементарними операціями наступні дії з матрицями:

- перестановка рядків;
- множення рядка на число, відмінне від нуля;
- додавання одного рядка до іншого, помноженого на довільне число.

Відзначимо, що при розв'язуванні системи рівнянь, на відміну від обчислення визначника й знаходження рангу, *не можна оперувати зі стовпцями*.

Пропонований нижче алгоритм називається методом Гаусса або методом послідовного виключення невідомих. Ціль алгоритму – за допомогою застосування послідовності елементарних операцій досягти того, щоб кожен рядок, крім, можливо, першого, починався з нулів, і число нулів до першого ненульового елемента в кожному наступному рядку було більше, ніж у попередньому.

Для застосування алгоритму потрібно, щоб у системі коефіцієнт a_{11} був відмінний від нуля. Якщо це не так, то доцільно на перше місце поставити рівняння з відмінним від нуля коефіцієнтом при x_1 і перепозначити коефіцієнти. Щоб не нагромаджувати додаткових позначень, будемо вважати, що така зміна рядків уже зроблена, тобто $a_{11} \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

<u>Крок 1</u>: помножимо кожне рівняння, крім першого, на множник $\frac{a_{11}}{a_{i1}}$, де i номер рівняння у системі (номер рядка системи).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} + a_{22}x_2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} + \dots + a_{2m}x_m \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} = b_2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{21}} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{n1}x_1 \cdot \frac{a_{11}}{a_{n1}} + a_{n2}x_2 \cdot \frac{a_{11}}{a_{n1}} + \dots + a_{nm}x_m \cdot \frac{a_{11}}{a_{n1}} = b_n \cdot \frac{a_{11}}{a_{n1}} \end{cases},$$

Після даного кроку всі коефіцієнти при змінній x_1 у всіх рівняннях дорівнюють a_{11}.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{11}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2m}x_m = b'_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{11}x_1 + a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nm}x_m = b'_n \end{cases}$$

<u>Крок 2</u>: Віднімемо з кожного рівняння системи, починаючи із другого, перше рівняння. Одержимо систему, у якій усі коефіцієнти при x_1 у всіх рівняннях, крім першого перетворились на нуль.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \qquad\quad a''_{22}x_2 + \dots + a''_{2m}x_m = b''_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ \qquad\quad a''_{n2}x_2 + \dots + a''_{nm}x_m = b''_n \end{cases}$$

Крок 3: Повторюємо кроки 1-2 для другого стовпця, починаючи із третього рівняння й т.д.

Кроки 1-3 – називаються *прямим ходом* методу Гаусса. Прямий крок продовжується доти, доки не реалізується один із трьох можливих випадків:

Випадок 1

Якщо в матриці на будь-якому кроці зустрівся рядок із номером k, у якому всі елементи при змінних дорівнюють нулю, а вільний член рівняння не дорівнює нулю, то виконання алгоритму зупиняємо й робимо висновок, що система несумісна. Дійсно, k-те рівняння матиме вигляд:

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b_k''.$$

Цьому рівнянню не задовольняє жоден набір чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Розглянемо наведену систему із трьох рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \quad\quad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right|.$$

У даному випадку система, через останнє рівняння, несумісна й не має розв’язків.

Зауваження 1. При розв’язуванні методом Гаусса зручніше переходити при прямому ході від первинної системи рівнянь до розширеної матриці системи, а при зворотному ході навпаки.

Зауваження 2. Для виключення помилки при округленні дробових виразів можна скористатися елементарними операціями над матрицями.

Приклад

Розв’язати СЛАР $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=5 \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=6 \\ 6x_1+4x_2+4x_3+6x_4=1 \end{cases}$.

◄ Крок 1: Для коефіцієнтів, що розташовані в першому стовпці знайдемо найменший загальний дільник і помножимо всі рівняння системи на таке число, щоб усі коефіцієнти, що розташовані в першому стовпці, дорівнювали цьому загальному дільникові.

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right\| \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{cccc|c} 6 & 9 & -3 & 3 & 15 \\ 6 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 36 \\ 6 & 4 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right\|.$$

Крок 2: Віднімемо від кожного рівняння системи, починаючи із другого, перше рівняння. Одержимо систему, у якій усі коефіцієнти при x_1 у всіх рівняннях, крім першого перетворились на нуль.

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 6 & 9 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & -11 & 7 & -1 & -13 \\ 0 & 3 & 21 & 21 & 21 \\ 0 & -5 & 7 & 3 & -14 \end{array}\right\| \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & -11 & 7 & -1 & -13 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & -5 & 7 & 3 & -14 \end{array}\right\|$$

<u>Крок 3:</u> Повторюємо кроки 1-2 для другого стовпця, починаючи із другого рівняння.

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 55 & -35 & 5 & 65 \\ 0 & 55 & 385 & 385 & 385 \\ 0 & 55 & -77 & -33 & 154 \end{array}\right\| \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 55 & -35 & 5 & 65 \\ 0 & 0 & 420 & 380 & 320 \\ 0 & 0 & -42 & -38 & 89 \end{array}\right\|.$$

<u>Крок 4:</u> Повторюємо кроки 1-2 для третього стовпця, починаючи із третього рівняння.

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -7 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 42 & 38 & 32 \\ 0 & 0 & 42 & 38 & -89 \end{array}\right\| \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -7 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 42 & 38 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -121 \end{array}\right\|.$$

Одержали систему, у якій коефіцієнти при x_3 і x_4 у рівнянні 4 перетворились на нуль.

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 11\cdot x_2 - 7\cdot x_3 + x_4 = 13, \\ 42\cdot x_3 + 38\cdot x_4 = 32, \\ 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = -121 \end{cases}$$

Отже, останнє рівняння суперечливе – воно звелося до неправильної рівності. У даному випадку система несумісна й не має розв'язків. Розглянемо матрицю системи, її ранг rang $A = 3$. Розглянемо розширену матрицю системи й мінор із другого, третього, четвертого стовпців і стовпця вільних членів. Одержимо мінор четвертого порядку. Отже, ранг матриці системи менше рангу розширеної матриці rang $A <$ rang A^*, тобто система не має розв'язків.►

<u>**Випадок 2**</u>

Якщо в результаті перетворень одержуємо систему з матрицею коефіцієнтів трикутного вигляду, то система є сумісною й визначеною. Розглянемо наведену систему із трьох рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right|$$

У цьому випадку система має єдиний розв'язок, який одержимо послідовним знаходженням змінних, починаючи з останнього рівняння. Цей процес знаходження змінних називається *зворотним ходом методу Гаусса*.

$$x_3=\frac{b_3}{a_{33}};\quad x_2=\frac{1}{a_{22}}\left(b_2-a_{23}x_3\right)=\frac{1}{a_{22}}\left(b_2-a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right);$$
$$x_1=\frac{1}{a_{11}}\left(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3\right)=\frac{1}{a_{11}}\left(b_1-a_{12}\frac{1}{a_{22}}\left(b_2-a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right)-a_{13}\frac{b_3}{a_{33}}\right). \tag{2.2}$$

У даному випадку ранг основної матриці rang A =3, ранг розширеної матриці також rang A^* =3, тобто rang A = rang A^*.

Приклад

На минулих виборах на посаду мера міста претендувало три кандидати. Є результати голосування на трьох виборчих дільницях, виражені у відсотках, а також загальна кількість голосів виборців, що проголосували за кожного кандидата з усього округа (таблиця 2.6). Визначити чисельність громадян, що брали участь у голосуванні на кожній виборчій дільниці.

Таблиця 2.6

Результати голосування

Кандидати	Результати голосування на трьох виборчих дільницях, %			Усього, за чол.
	дільниця №1	дільниця №2	дільниця №3	
№1	20	25	30	2360
№2	45	50	50	4540
№3	35	25	20	2410

◄ Позначимо через x_1, x_2, x_3 кількість громадян, що брали участь у голосуванні, на кожній виборчій дільниці. Використовуючи дані таблиці, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,20\cdot x_1+0,25\cdot x_2+0,30\cdot x_3=2360\\ 0,45\cdot x_1+0,50\cdot x_2+0,50\cdot x_3=4540\\ 0,35\cdot x_1+0,25\cdot x_2+0,20\cdot x_3=2410. \end{cases}$$

Розв'яжемо задачу методом Гаусса з використанням програми *Maxima.*

Уводимо розширену матрицю системи A. Для виконання кроків методу Гаусса використовуємо функцію `row`. Позначимо рівняння (рядки) розширеної матриці L_1=`row(A,1)`, L_2=`row(A,2)` і L_3=`row(A,3)`. Крім того, щоб не захаращувати екран цифрами величезної розрядності, застосовуємо оператор `fpprintprec`, який встановлює число значущих цифр, наприклад 5.

Прямий крок методу Гаусса:

Крок 1: помножимо L_2 на множник $\dfrac{0,20}{0,45}$ і віднімемо від нього L_1. Ці операції еквівалентні операціям множення матриці на число й віднімання двох матриць, де маємо справу з матрицями-рядками.

wxMaxima 0.7.4 [Лінійна алгебра.wxm]

Файл Правка Maxima Уравнения Алгебра Анализ Упростить Графики Числе

```
(%i1) A:matrix([0.2,0.25,0.3,2360],
               [0.45,0.5,0.5,4540],
               [0.35,0.25,0.2,2410])$

(%i2) fpprintprec: 5$

(%i3) A1:matrix([row(A,1)],
                [row(A,2)*0.2/0.45-row(A,1)],
                [row(A,3)*0.2/0.35-row(A,1)]);
```

(%o3)
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.25 & 0.3 & 2360 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2.77556\,10^{-17} & -0.0278 & -0.0778 & -342.22 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2.77556\,10^{-17} & -0.107 & -0.186 & -982.86 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

```
(%i4) A2:matrix([row(A1,1)],
                [row(A1,2)],
                [row(A1,3)*0.0278/0.107-row(A1,2)]);
```

(%o4)
$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.2 & 0.25 & 0.3 & 2360 \end{bmatrix}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.77556\,10^{-17} & -0.0278 & -0.0778 & -342.22 \end{bmatrix}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} -3.49668\,10^{-17} & -5.93384\,10^{-5} & 0.0295 & 86.863 \end{bmatrix}\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

```
(%i5) x3:86.863/0.0295;
(%o5) 2944.5

(%i6) x2:(-342.22+0.0778*x3)/-0.0278;
(%o6) 4069.7

(%i7) x1:(2360-0.25*x2-0.3*x3)/0.2;
(%o7) 2296.1
```

Рис. 2.12. Фрагмент обчислень у *Maxima*

<u>Крок 2:</u> помножимо L_3 на множник $\frac{0,20}{0,35}$ і віднімемо від нього L_1.

Одержали матрицю $A1$, у якій усі коефіцієнти при x_1 у всіх рівняннях, крім першого, перетворились на нуль. Позначимо рядки матриці $A1$ L^*_1=`row(A1,1)`, L^*_2=`row(A1,2)` і L^*_3=`row(A1,3)`.

<u>Крок 3:</u> помножимо L^*_3 на множник $\frac{0,0278}{0,107}$ і віднімемо від нього L^*_2.

Отримали систему $A2$ трикутного вигляду, у третьому рівнянні якої всі коефіцієнти крім коефіцієнта при x_3 перетворились на нуль (рис. 2.12). Насправді замість нуля бачимо нескінченно малі числа, що говорить про величезну точність програми *Maxima*.

Робимо зворотний крок: знаходимо змінні.

Система має єдиний розв'язок, що виходить послідовним знаходженням змінних, починаючи з останнього рівняння. Для кроків 4, 5, 6 використовуємо формули 2.2. Отже, чисельність громадян, що брали участь у голосуванні, відповідно, на першій, другій та третій дільницях x_1=2296 чол., x_2=4070 чол., x_3=2945 чол. ►

Випадок 3

Якщо виходить система із трапецеїдальною матрицею коефіцієнтів і при цьому вільний член рівняння теж дорівнює нулю, то система сумісна й невизначена. Розглянемо наведену систему із трьох рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Останнє рівняння системи обернулося на нуль, і система стала недовизначеною – два рівняння із трьома невідомими. Запишемо розв'язки системи в такий спосіб:

$$x_3 = C;$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}x_3\right) = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\cdot C\right);$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}\cdot C\right) = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{23}\frac{b_3}{a_{33}}\right) - a_{13}\cdot C\right).$$

Задаючи різні значення параметра C, ми одержимо різні розв'язки системи. Отже, розв'язків безліч. Оскільки розв'язок залежить від одного параметра, то розмірність розв'язку дорівнює 1. Розглянемо ранги основної матриці системи й розширеної матриці, вони, напевно, збігаються (рівні 2), але менш за розмірність системи (кількість невідомих), тобто $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^* < n$.

У загальному випадку, коли кількість змінних складає n, послідовність дій аналогічна. У лівій частині залишаємо невідомі з номерами, що відповідають першим ненульовим елементам у кожному рядку, тобто $x_i, x_j, \ldots, x_p$. Визначимо, що p=rang A. Інші невідомі переносимо в праву частину. Уважаючи невідомі в правій частині деякими фіксованими величинами, нескладно виразити через них невідомі лівої частини.

Тепер, даємо невідомим у правій частині довільні значення й обчислюємо значення змінних лівої частини, тобто знаходимо різні розв'язки первинної системи $A \cdot X = B$. Щоб записати загальний розв'язок, потрібно невідомі в правій частині позначити в будь-якому порядку буквами $C_1, C_2, \ldots, C_{n-p}$, включаючи і ті невідомі, які явно не виписані у правій частині через нульові коефіцієнти. Тоді невідомі можна записати у вигляді стовпця, де кожен елемент буде лінійною комбінацією довільних величин $C_1, C_2, \ldots, C_{n-p}$ (зокрема, просто довільною величиною C_k). Цей запис і буде загальним розв'язком системи.

Якщо система була однорідною, то одержимо загальний розв'язок однорідної системи. Коефіцієнти при C_1, узяті в кожнім елементі стовпця загального розв'язку, складуть перший розв'язок фундаментальної системи розв'язків, коефіцієнти при C_2 – другий розв'язок і т.д.

Фундаментальну систему розв'язків однорідної системи можна одержати й іншим способом. Для цього одній змінній, перенесеній у праву частину, потрібно дати значення 1, а іншим – нулі. Обчисливши значення змінних у лівій частині, одержимо один розв'язок фундаментальної системи. Надавши іншій змінній у правій частині значення 1, а іншим – нулі, одержимо другий розв'язок фундаментальної системи і т.д.

Може виникнути питання: «Навіщо розглядати випадок, коли деякі стовпці матриці A^* нульові? Адже в цьому випадку відповідні ним змінні в системі рівнянь у явному вигляді відсутні». Справа в тому, що в деяких задачах, наприклад, при знаходженні власних чисел матриці, такі системи виникають, але ігнорувати відсутні змінні не можна, тому що при цьому відбувається втрата важливих для задачі розв'язків.

Приклади

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 + x_6 = 2, \\ 8x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 13x_5 + 2x_6 = 14, \\ 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 6x_5 - x_6 = 18, \end{cases}$$

де $x_1, \ldots, x_6$ – невідомі.

◄ Випишемо розширену матрицю системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 4 & -8 & 13 & 2 & 14 \\ 0 & 6 & 3 & -6 & 6 & -1 & 18 \end{array}\right).$$

Діючи за правилами, виконуємо прямій крок методу Гаусса. Додамо до другого рядка перший, помножений на число $\left(-\frac{8}{2}\right)$, до третього рядка додамо перший, помножений на $\left(-\frac{6}{2}\right)$. Одержимо:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -4 & 12 \end{array}\right).$$

Додамо до третього рядка другий, помножений на число $\left(-\frac{6}{3}\right)$. Отримаємо:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямий крок методу Гаусса закінчений. Розглянемо ранги матриці системи й розширеної матриці, вони, певно, збігаються (рівні 2), але менші за розмірності системи (кількості невідомих n=6), тобто rang A = rang $A^* < n$.

Отже, розв’язків безліч.

Оскільки будь-яка фундаментальна система розв’язків складається з k розв’язків ($k = n$ – rang A=6–2=4), то розмірність розв’язку дорівнює 4.

Виписуємо за останньою матрицею систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 + x_6 = 2, \\ \qquad\qquad\qquad -3x_5 - 2x_6 = 6. \end{cases}$$

У лівій частині другого рівняння залишаємо першу ненульову змінну x_5, а у лівій частині першого рівняння повинна залишитися кількість змінних дорівнює ранговні основної матриці p=rang A=2. Залишаємо в лівій частині першого рівняння дві змінні: першу ненульову x_2 і вже визначену у другому рівнянні x_5. Інші невідомі x_1, x_3, x_4, x_6 переносимо у праву частину (невідома x_1 реально у ній присутньою не буде, коефіцієнт перед нею дорівнює нулю). Маємо:

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_5 = 2 - x_3 + 2x_4 - x_6, \\ \qquad -3x_5 = 6 + 2x_6. \end{cases}$$

Уважаючи невідомі в правій частині деякими фіксованими величинами, нескладно виразити через них невідомі лівої частини.

Нехай, наприклад, $x_1 = C_1$, $x_3 = C_2$, $x_4 = C_3$, $x_6 = C_4$. Тоді:

$$\begin{cases} 2x_2 + 4x_5 = 2 - C_2 + 2C_3 - C_4, \\ \qquad -3x_5 = 6 + 2C_4. \end{cases}$$

Знаходимо: $x_5 = -2 - \frac{2}{3}C_4$,

$$x_2 = -2x_5 + 1 - \frac{1}{2}C_2 + C_3 - \frac{1}{2}C_4 = 4 + \frac{4}{3}C_4 + 1 - \frac{1}{2}C_2 + C_3 - \frac{1}{2}C_4 =$$

$$= 5 - \frac{1}{2}C_2 + C_3 + \frac{5}{6}C_4,$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні числа.

Загальний розв'язок можна записати так:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 5 - C_2/2 + C_3 + 5C_4/6 \\ C_2 \\ C_3 \\ -2 - 2C_4/3 \\ C_4 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$$

◄ Запишемо розширену матрицю системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right).$$

До другого рядка додамо перший, помножений на (-2), до третього рядка додамо перший, помножений на (-4), до четвертого рядка додамо перший, помножений на (-5):

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -6 \\ 0 & -6 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right).$$

Віднімемо від третього рядка другий:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -7 & 7 & -18 \end{array}\right).$$

У третьому рядку всі: елементи матриці системи дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю. Отже, система несумісна, розв'язків немає.

Відповідь: $X = \varnothing$. ►

Приклад 3. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

◀ Запишемо розширену матрицю системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Перший рядок, помножений на числа $\left(-\frac{3}{2}\right)$, (-1), (-2), додамо відповідно до другого, третього і четвертого рядків:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7/2 & -11/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

До третього рядка додамо другий, помножений на $\left(-\frac{4}{7}\right)$. Одержимо:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7/2 & -11/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 15/7 & -24/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

До четвертого рядка додамо третій, помножений на $\left(\frac{49}{15}\right)$:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7/2 & -11/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 15/7 & -24/7 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & -61/5 & -14/15 \end{array}\right).$$

За останньою матрицею маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ \frac{7}{2}x_2 - \frac{11}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 = \frac{1}{2}, \\ \frac{15}{7}x_3 - \frac{24}{7}x_4 = \frac{-2}{7}, \\ \frac{-61}{5}x_4 = \frac{-14}{15}. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 7x_2 - 11x_3 + 5x_4 = 1, \\ 15x_3 - 24x_4 = -2, \\ 183x_4 = 14. \end{cases}$$

Знаходимо послідовно значення невідомих:

$$x_4 = \frac{14}{183}, \qquad x_3 = \frac{24x_4 - 2}{15} = \frac{24\frac{14}{183} - 2}{15} = \frac{8\cdot 14 - 122}{61\cdot 15} = -\frac{2\cdot 5}{183\cdot 5} = -\frac{2}{183},$$

$$x_2 = \frac{-\frac{11\cdot 2}{183} - \frac{5\cdot 14}{183} + 1}{7} = \frac{-22 - 70 + 183}{183\cdot 7} = \frac{91}{7\cdot 183} = \frac{13}{183},$$

$$x_1=\frac{1+x_2-3x_3+x_4}{2}=\frac{183+13+6+14}{183\cdot 2}=\frac{216}{2\cdot 183}=\frac{108}{183}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\frac{1}{183}\begin{pmatrix} 108 \\ 13 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix}$.►

Зауваження 3. Так само, як і при розв'язуванні системи рівнянь за правилом Крамера, при використанні методу Гаусса доводиться виконувати великий обсяг обчислювальної роботи. Через це цілком можливо, що буде припущено якоїсь помилки в обчисленнях. Тому бажано після розв'язання системи виконати перевірку, тобто підставити отримані значення невідомих у рівняння системи. Для виконання повної перевірки підстановку потрібно зробити в усі рівняння системи. Якщо ж з якихось причин це неможливо, то можна підставити знайдені значення в одне рівняння. На відміну від правила Крамера в методі Гаусса цю підстановку потрібно робити в ОСТАННЄ рівняння ПЕРВИННОЇ системи. За наявності в цьому рівнянні всіх невідомих ця підстановка майже завжди покаже наявність помилки.

Приклад 4. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4+2x_5=0, \\ -5x_1+7x_2+x_3+10x_4-11x_5=0, \\ -x_1+5x_2-x_3+8x_4-7x_5=0. \end{cases}$$

◄ Складаємо розширену матрицю системи:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 7 & 1 & 10 & -11 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 8 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

Помножимо перший рядок послідовно на (–2), 5 і 1 і додамо, відповідно, до другого, третього й четвертого рядків. Одержимо матрицю:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & -4 & 20 & -16 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 10 & -8 & 0 \end{array}\right).$$

Другий рядок помножимо послідовно на числа 4 і 2 і додамо, відповідно, до третього й четвертого рядків. Одержимо матрицю:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Прямий крок методу Гаусса закінчений. В отриманої матриці легко визначити rang A = rang A^*=2 та її базисний мінор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$. Згідно з теоремою число розв'язків фундаментальної системи дорівнює різниці між числом невідомих n і рангом матриці.

У нашому випадку фундаментальна система складається із трьох розв'язків: n–rang A = 5–2=3.

Переходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ -3x_2 + x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

Невідомі x_1 і x_2 залишаємо у лівій частині, інші переносимо у праву частину:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - 2x_4 + x_5, \\ \quad -3x_2 = -x_3 + 5x_4 - 4x_5. \end{cases}$$

Одержимо фундаментальну систему розв'язків однорідної системи способом, позначеним вище. Для цього змінній x_3, перенесеній у праву частину, дамо значення 1, а іншим – нулі. Обчисливши значення змінних у лівій частині, одержимо один розв'язок фундаментальної системи. Дамо змінній x_4 у правій частині значення 1, а іншим – нулі, одержимо другий розв'язок фундаментальної системи і т.д.

• Покладемо $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Одержимо із другого рівняння останньої системи: $x_2 = \dfrac{x_3 - 5x_4 + 4x_5}{3} = \dfrac{1 - 0 + 0}{3} = \dfrac{1}{3}$. З першого рівняння останньої системи: $x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -\dfrac{1}{3} + 1 - 0 + 0 = \dfrac{2}{3}$.

Перший розв'язок фундаментальної системи: $X_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Покладемо $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$.

Одержимо із другого рівняння останньої системи:

$$x_2 = \frac{x_3 - 5x_4 + 4x_5}{3} = \frac{0 - 5 + 0}{3} = -\frac{5}{3}.$$

З першого рівняння останньої системи:

$$x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = \frac{5}{3} + 0 - 2 + 0 = -\frac{1}{3}.$$

Другий розв’язок фундаментальної системи розв’язків: $X_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Покладемо $x_5 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Одержимо із другого рівняння останньої системи:

$$x_2 = \frac{x_3 - 5x_4 + 4x_5}{3} = \frac{0 - 0 + 4}{3} = \frac{4}{3}.$$

З першого рівняння останньої системи:

$$x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -\frac{4}{3} + 0 - 0 + 1 = -\frac{1}{3}.$$

Третій розв’язок фундаментальної системи розв’язків: $X_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Фундаментальна система розв’язків знайдена. Загальний розв’язок має вигляд:

$$X = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + C_3 \cdot X_3$$

Відповідь: Фундаментальна система розв’язків:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв’язок: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Розв’язки помножені на будь-які ненульові числа знову утворюють фундаментальну систему. Тому для попереднього приклада фундаментальну систему утворять і такі розв’язки:

$$X_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв’язок можна записати так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

2.21. Індивідуальне завдання № 2.6

Студент повинен розв’язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Знайти фундаментальну систему розв’язків лінійної системи рівнянь:

1. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & 0 & 34 & -5 \end{array} \right\|$

2. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 7 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right\|$

3. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 8 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & -12 & -4 & 4 \end{array} \right\|$

4. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{array} \right\|$

5. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{array} \right\|$

6. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 5 & -2 & 9 & -4 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & 11 & -2 & -6 \end{array} \right\|$

7. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 12 & -1 & 7 & 11 & -5 \\ 24 & -2 & 14 & 22 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right\|$

8. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & 6 & -1 \end{array} \right\|$

9. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 16 & -6 & 6 & 7 \end{array} \right\|$

10. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|$

11. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 8 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & 5 \end{array} \right\|$

12. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 12 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right\|$

13. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 7 & -14 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -10 & 1 & 5 & -13 \end{array} \right\|$

14. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -6 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right\|$

15. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right\|$

16. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -2 & 5 \end{array} \right\|$

17. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & -9 & 30 & -3 \end{array} \right\|$

18. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -5 & -7 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right\|$

19. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & 0 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & -2 & -16 & 3 \end{array} \right\|$

20. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 1 & 11 & -12 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right\|$

21. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 9 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & -16 & 3 \end{array} \right\|$

22. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -3 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 5 \end{array} \right\|$

23. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -2 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -7 \end{array} \right\|$

24. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{array} \right\|$

25. $\left\| \begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 5 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -9 \end{array} \right\|$

26. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 6 \end{array} \right\|$

27. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 11 & -6 & 1 \end{array} \right\|$

28. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\|$

29. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 16 & 1 & 6 \end{array} \right\|$

30. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right\|$

31. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -3 & 0 \end{array} \right\|$

2.22. Індивідуальне завдання № 2.7

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Знайти фундаментальну систему розв'язків і частковий розв'язок лінійної системи рівнянь:

1. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & -4 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right\|$

2. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right\|$

3. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right\|$

4. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -5 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -9 & 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & -4 & -1 & -4 & 1 & 3 \end{array} \right\|$

5. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & -1 & 2 \end{array} \right\|$

6. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right\|$

7. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 & 7 & 1 \end{array} \right\|$

8. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right\|$

9. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right\|$

10. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & -3 & 2 & -3 & 3 \end{array} \right\|$

11. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right\|$

12. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -4 & 2 & 1 \end{array} \right\|$

13. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right\|$

14. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & -1 & 1 & -4 & 2 \end{array} \right\|$

15. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 8 & 9 & 1 \end{array} \right\|$

16. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & -1 & 2 \end{array} \right\|$

17. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right\|$

18. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & -4 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & -4 & 3 & 5 \end{array} \right\|$

19. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & -9 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -4 & -1 & -3 & 3 \end{array} \right\|$

20. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right\|$

21. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right\|$

22. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -4 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & -3 & 2 & 2 \end{array} \right\|$

23. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right\|$

24. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right\|$

25. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & -3 & -1 & 3 \end{array} \right\|$

26. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right\|$

27. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right\|$

28. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 4 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 3 & 3 \end{array} \right\|$

29. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & -7 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & -1 & -3 & 2 \end{array} \right\|$

30. $\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & -4 & 3 & 3 \end{array} \right\|$

31. $\left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right\|$

Контрольні запитання

1. За якими правилами виконуються операції над матрицями?
2. Які властивості визначників?
3. У чому полягає спосіб обчислення визначників розкладанням за рядками (стовпцями)?
4. Які властивості зворотної матриці?
5. Що таке ранг і лінійна залежність (незалежність) матриці?
6. У чому полягає розв'язання систем лінійних рівнянь методом Крамера й методом зворотної матриці?
7. У чому зміст теорем Кронекера-Капеллі?
8. У чому полягає розв'язок систем лінійних рівнянь методом Гаусса?
9. Як знаходиться загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь?
10. Як знаходиться загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь?

В розділі розглянуті основи матричного аналізу, структура й способи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

3. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Окрім скалярних величин зустрічаються й такі, для визначення яких, крім чисельного значення, необхідно знати також їхній напрямок у просторі. Такі величини називаються векторними.

3.1. Поняття вектора

Спрямованим відрізком назвемо відрізок, щодо кінців якого відомо, який із них перший, а який другий.

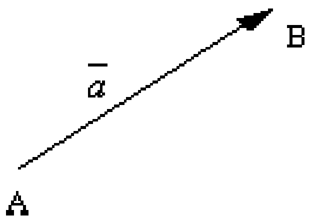


Рис. 3.1. Вектор на площині

Вектором називається спрямований відрізок, що має визначену довжину, у якого одна з обмежуючих його точок приймається за початок, а друга – за кінець. Якщо A – початок вектора, B – його кінець, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$, крім того, вектор часто позначають одною буквою $\vec{a}$. На рисунку вектор позначають відрізком, а його напрямок стрілкою.

Модулем або *довжиною* вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину спрямованого відрізка. Позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

До векторів будемо відносити й, так званий, нульовий вектор, у якого початок і кінець збігаються. Він позначається $\vec{0}$. Нульовий вектор не має визначеного напрямку, і модуль його дорівнює нулю $|\vec{0}| = 0$.

3.2. Колінеарні й компланарні вектори

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони розташовані на одній прямій або на паралельних прямих. При цьому, якщо вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ однаково спрямовані, будемо писати $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, протилежно $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Вектори, розташовані на прямих, паралельних одній і тій же площині, називаються *компланарними*.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються такими, що *дорівнюють* один до одного, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і дорівнюють один до одного за довжиною. У цьому випадку пишуть $\vec{a} = \vec{b}$.

З визначення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, якщо зсунути його початок у будь-яку точку простору.

Якщо дано вектор $\overrightarrow{AB}$, то, вибравши будь-яку точку A', можемо побудувати тільки один вектор $\overrightarrow{A'B'}$, що дорівнює даному, або, як говорять, перенести вектор $\overrightarrow{AB}$ у точку A' (рис. 3.2).

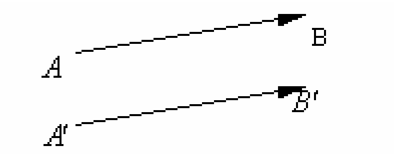


Рис. 3.2. Перенос вектора $\overrightarrow{AB}$ у точку A'

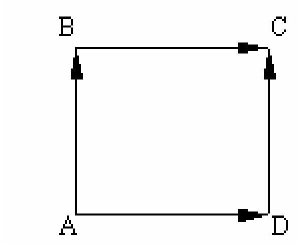


Рис. 3.3. Рівність і нерівність однакових за довжиною векторів

Якщо розглянути квадрат *ABCD*, то на підставі визначення рівності векторів, ми можемо написати $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, але $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DC}$, хоча усі вони мають однакову довжину (рис. 3.3).

3.3. Лінійні операції над векторами

Множення вектора на число

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається новий вектор $\vec{b}$ такий, що:

1. $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2. Вектор $\vec{b}$ є колінеарним векторові $\vec{a}$;

3. Вектори $\vec{b}$ і $\vec{a}$ спрямовані однаково, якщо $\lambda > 0$ і протилежно, якщо $\lambda < 0$. (Якщо $\lambda = 0$, то з умови 1 випливає, що $\vec{b} = \vec{0}$).

Добуток вектора $\vec{a}$ на число λ позначається $\lambda \cdot \vec{a}$.

Наприклад, $\frac{1}{2}\vec{a}$ це вектор, спрямований у той же бік, що і вектор $\vec{a}$, і має довжину, удвічі меншу, ніж вектор $\vec{a}$.

Операція множення має такі **властивості**:

1. Для будь-яких чисел α і β і вектора $\vec{a}$ виконується рівність $\alpha\left(\beta\vec{a}\right) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

Дійсно, вектори, що знаходяться в обох частинах рівності, мають однакову довжину $|\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|$. Крім того, ясно, що вони однаково спрямовані, тому що їхній напрямок збігається з напрямком вектора $\vec{a}$, якщо α і β одного знака, і протилежно спрямовані $\vec{a}$, якщо α і β різних знаків.

2. Нехай даний вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$. Для будь-якого колінеарного йому вектора $\vec{b}$ існує і до того ж тільки одне число λ, що задовольняє рівності $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

Число λ має тільки одне значення тому, що при множенні вектора $\vec{a}$ на два різних числа, одержуємо два різних вектори.

Додавання векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два довільних вектори. Візьмемо довільну точку *O* і побудуємо вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Після цього з точки *A* відкладемо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, що з'єднує початок першого вектора $\vec{a}$ с кінцем другого $\vec{b}$, називається *сумою* цих векторів і позначається $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

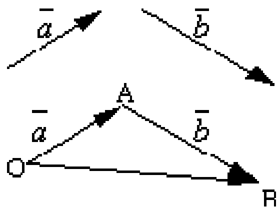


Рис. 3.4. Сума двох векторів

Сформульоване визначення додавання векторів називають *правилом паралелограма*, тому що ту ж саму суму векторів можна одержати у такий спосіб: відкладемо від точки *O* вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$; побудуємо на цих векторах паралелограм *OABC*. Оскільки вектори $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$, то вектор $\overrightarrow{OB}$, що є діагоналлю паралелограма, проведеної з вершини *O*, буде сумою векторів $\vec{a} + \vec{b}$.

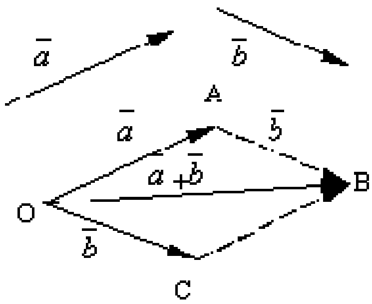


Рис. 3.5. Правило паралелограма

Легко перевірити наступні **властивості додавання векторів**.

1. Ясно, що додавання нульового вектора до будь-якого вектора $\vec{a}$ не змінює вектора $\vec{a}$, тобто $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

2. Додавання векторів є комутативним, тобто $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Ця властивість відразу випливає із правила паралелограма.

3. Додавання векторів асоціативно, тобто для будь-яких трьох векторів $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$. Тому суму трьох векторів часто записують просто $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Суму трьох векторів можна одержати у такий спосіб. З довільної точки *O* відкладається вектор, що дорівнює першому векторові. До його кінця приєднується початок другого, до кінця другого – початок третього. Вектор, що з'єднує початок першого вектора з кінцем останнього, буде сумою даних векторів. Аналогічно будується сума будь-якого обмеженого числа векторів.

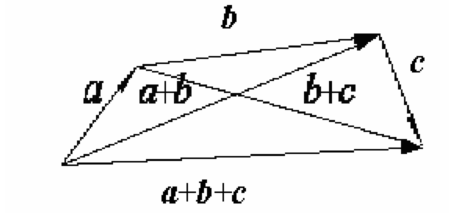


Рис. 3.6. Сума трьох векторів

4. Для будь-якого числа λ і будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\lambda \cdot \left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda \cdot \vec{a}+\lambda \cdot \vec{b}.$$

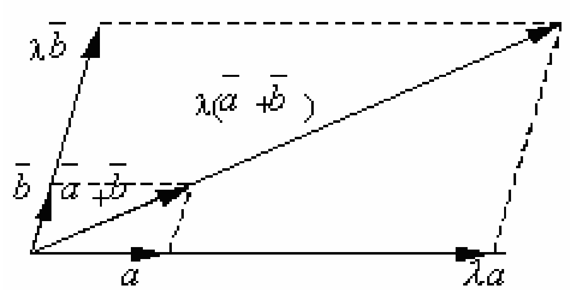


Рис. 3.7. Четверта властивість додавання векторів

Зауважимо, що при множенні векторів на число λ змінюються тільки розміри векторів, тобто масштаб креслення; фігури залишаються подібними. Оскільки вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{a}+\vec{b}$ утворять сторони і діагональ паралелограма, то, помноживши всі члени на λ, тобто змінивши лише розміри векторів однаковим чином, ми одержимо знову паралелограм, а виходить, збережеться рівність $\lambda \cdot \vec{a}+\lambda \cdot \vec{b}=\lambda \cdot \left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

5. Для будь-яких чисел a і b і будь-якого вектора $\vec{a}$ виконується рівність $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha \cdot \vec{a}+\beta \cdot \vec{a}$.

Різниця векторів

Вектор, колінеарний даному векторові $\vec{a}$, рівний йому за довжиною і протилежно спрямований, називається *протилежним* вектором для вектора $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$ або $\overleftarrow{a}$.

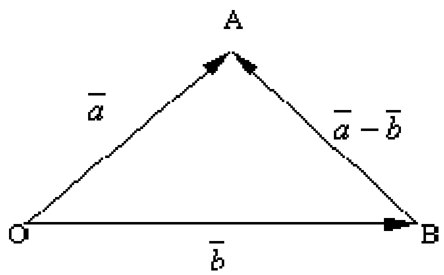


Рис. 3.8. Різниця двох векторів

Протилежний вектор $\overleftarrow{a}$ можна розглядати як результат множення вектора $\vec{a}$ на число $\lambda = -1$: $-\vec{a} = (-1)\cdot\vec{a}$.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, що дорівнює сумі векторів $\overleftarrow{a}$ і $-\vec{b}$, тобто $\vec{c} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

Зрозуміло, що $\vec{a} - \vec{a} = \vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.

Легко довести, що $\vec{b} + \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}$.

Таким чином, якщо $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, то $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

З визначення суми двох векторів випливає правило побудови вектора-різниці. Відкладаємо вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ із спільної точки *O*.

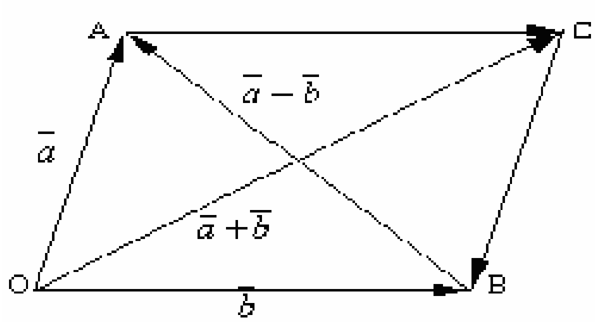


Рис. 3.9. Правило побудови вектора різниці

Щоб знайти вектор-різницю, потрібно до $\overrightarrow{OA}$ додати вектор $-\overrightarrow{OB}$ або $\overrightarrow{BO}$. Тоді $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$, що з'єднує кінці векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і спрямований від «від'ємника» до «зменшуваного» (тобто від другого вектора до першого), і буде різницею $\vec{a} - \vec{b}$. Дійсно, за правилом додавання векторів $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ або $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Таким чином, якщо на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, відкладених із спільної точки *O*, побудувати паралелограм *OACB*, то вектор $\overrightarrow{OC}$, що збігається з більшою діагоналлю паралелограма, дорівнює сумі $\vec{a} + \vec{b}$, а вектор $\overrightarrow{BA}$, що збігається з меншою діагоналлю, дорівнює різниці $\vec{a} - \vec{b}$.

3.4. Кут між векторами. Проекція вектора на вісь

Нехай у просторі дані два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Відкладемо від довільної точки *O* вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

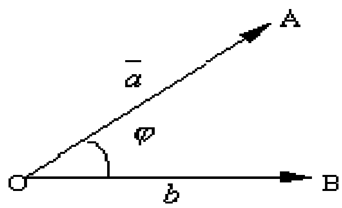


Рис. 3.10. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається найменший з кутів $\angle AOB$.

Кут між векторами позначається $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

Розглянемо вісь l і відкладемо на ній одиничний вектор $\vec{e}$ (тобто вектор, довжина якого дорівнює одиниці).

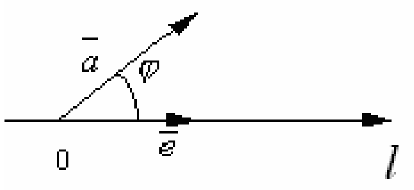


Рис. 3.11. Кут між вектором $\vec{a}$ і віссю l

Під кутом між вектором $\vec{a}$ і віссю l розуміють кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{e}$. Отже, нехай l – деяка вісь і $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ – вектор. Позначимо через A_1 і B_1 проекції на вісь l відповідно точок A і B. Припустимо, що A_1 має координату x_1, а B_1 – координату x_2 на осі l. Тоді *проекцією* вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається різниця x_2-x_1 між координатами проекцій кінця і початку вектора $\overrightarrow{AB}$ на цю вісь.

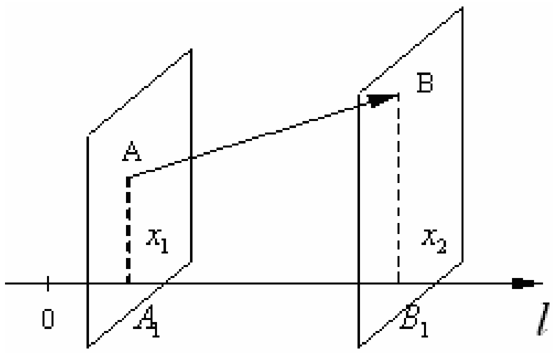


Рис. 3.12. Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l

Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь l будемо позначати $np_l\vec{a}=np_l\overrightarrow{AB}$.

Ясно, що коли кут між вектором $\vec{a}$ і віссю l гострий, то $x_2>x_1$, і проекція $x_2-x_1>0$; якщо цей кут тупий, то $x_2<x_1$ і проекція $x_2-x_1<0$. Нарешті, якщо вектор $\vec{a}$ перпендикулярний осі l, то $x_2=x_1$ і $x_2-x_1=0$.

Таким чином, проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l – це довжина відрізка A_1B_1, узята з відповідним знаком. Отже, проекція вектора на вісь це число або скаляр.

Аналогічно визначається проекція одного вектора на іншій. У цьому випадку знаходяться проекції кінців даного вектора на ту вісь, на якій лежить другий вектор.

Розглянемо деякі основні **властивості проекцій**.

1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добуткові модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута між вектором і віссю: $np_l\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a};l}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\cos(\varphi)$.

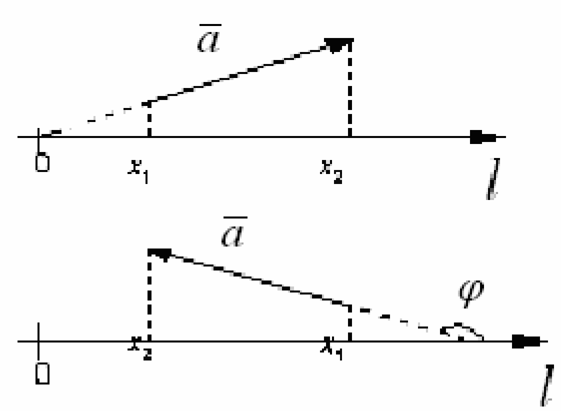


Рис. 3.13. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l, через кут між вектором і віссю

2. Проекція суми двох векторів на вісь дорівнює сумі проекцій векторів на ту ж вісь: $np_l\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=np_l\vec{a}+np_l\vec{b}$.

Наслідок. Проекція різниці двох векторів на вісь дорівнює різниці проекцій цих векторів на ту ж вісь.

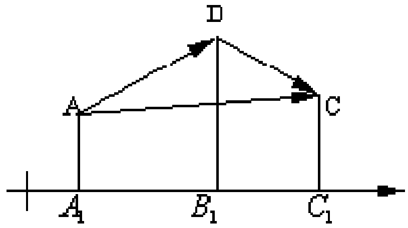


Рис. 3.14. Проекція суми двох векторів

Цю властивість можна узагальнити на випадок будь-якого числа доданків.

3. Якщо ненульовий вектор $\vec{a}$ збільшується у λ разів, то його проекція на вісь також збільшується на це число: $np_l\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\cdot np_l\vec{a}$.

3.5. Лінійна залежність й незалежність векторів. Векторні лінійні простори

Розглянемо кілька векторів $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$.

Лінійною комбінацією даних векторів називається будь-який вектор вигляду $\vec{a}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_k\cdot\overrightarrow{a_k}$, де $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ – деякі числа. Числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ називаються коефіцієнтами лінійної комбінації. Вектор $\vec{a}$ лінійно виражається через дані вектори $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$, тобто виходить з них за допомогою лінійних дій.

Наприклад, якщо дані три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, то у якості їхньої лінійної комбінації можна розглядати вектори: $\vec{d}=3\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{f}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\vec{g}=2\vec{a}$.

Якщо вектор представлений як лінійна комбінація якихось векторів, то говорять, що він *розкладений* за цими векторами.

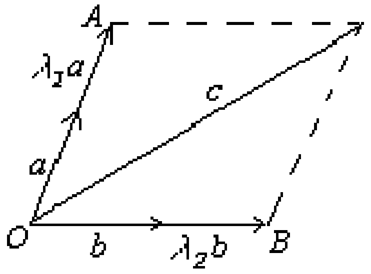


Рис. 3.15. Розкладання вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Вектори $\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_k}$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, не всі рівні нулю, що $\lambda_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_k\cdot\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$. Ясно, що задані вектори будуть лінійно залежними, якщо будь-який із цих векторів лінійно виражається через інші.

У противному випадку, тобто коли співвідношення $\lambda_1\cdot\overrightarrow{a_1}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{a_2}+\ldots+\lambda_k\cdot\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$ виконується тільки при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$, ці вектори називаються *лінійно незалежними*.

Теорема 1. Будь-які два вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні.

Таким чином, теорема стверджує, що лінійно незалежними на площині можуть бути тільки неколінеарні вектори.

Теорема 2. Три вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.

Таким чином, три некомпланарних вектори завжди лінійно незалежні. Крім того, можна довести, що кожні чотири вектори лінійно залежні.

3.6. Базис, розкладання вектора за базисом. Ортогональні системи векторів. Перехід від одного базису до іншого

Базисом називається сукупність відмінних від нуля лінійно незалежних векторів. Елементи базису будемо позначати $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\ldots,\overrightarrow{e_k}$.

У попередньому параграфі ми довели, що два неколінеарних вектори на площині лінійно незалежні, відповідно до теореми 1 (*будь-які два вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні*). Отже, базисом на площині є будь-які два неколінеарних вектори на цій площині.

Аналогічно у просторі лінійно незалежні будь-які три некомпланарних вектори. Отже, базисом у просторі назвемо три некомпланарних вектори.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3. Нехай у просторі заданий базис $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$. Тоді будь-який вектор $\vec{a}$ можна представити у вигляді лінійної комбінації $\vec{a}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}+z\overrightarrow{e_3}$, де x, y, z – деякі числа. Таке розкладання єдине.

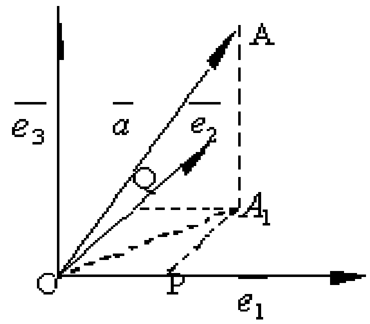


Рис. 3.16. Розкладання вектора $\vec{a}$ за векторами $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ у просторі

Як частину випадку із цієї ж теореми можна сформувати **наслідок**:

Якщо задано базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ на площині, то будь-який вектор, компланарний з векторами $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ можна перетворити у вигляд $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$, причому таке розкладання єдине.

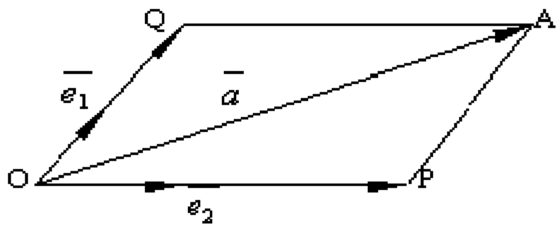


Рис. 3.17. Розкладання вектора $\vec{a}$ за векторами $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ на площині

Таким чином, базис дозволяє знайти однозначне співвідношення кожного вектора до трійки чисел – коефіцієнтів розкладання цього вектора за векторами базису: $\vec{a} \to (x, y, z)$. Вірно й зворотне, з кожної трійки чисел *x, y, z* за допомогою базису можна утворити вектор, якщо скласти лінійну комбінацію $x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = \vec{a}$.

Якщо $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ базис і $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$, то числа *x, y, z* називаються *координатами* вектора $\vec{a}$ у даному базисі. Координати вектора $\vec{a}$ позначають $\vec{a} = (x, y, z)$.

3.7. Декартова система координат

Нехай у просторі задана точка *O* і три некомпланарних вектори $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

Декартовою системою координат у просторі (на площині) називається сукупність точки й базису, тобто сукупність точки й трьох некомпланарних векторів (2-х неколінеарних векторів), що виходять із цієї точки.

Точка *O* називається початком координат; прямі, що проходять через початок координат у напрямку базисних векторів, називаються осями координат – віссю абсцис, ординат і аплікат. Площини, що проходять через осі координат, називають координатними площинами.

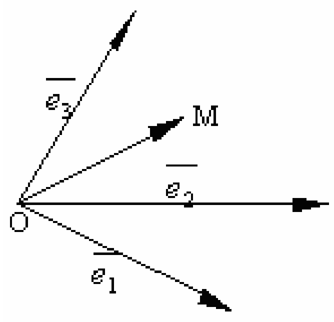


Рис. 3.18. Точка *M* у базисі векторів $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$

Розглянемо в обраній системі координат довільну точку *M*. Уведемо поняття координати точки *M*. Вектор $\overrightarrow{OM}$, що з'єднує початок координат із точкою *M* називається *радіусом-вектором* точки *M*.

Векторові $\overrightarrow{OM}$ в обраному базисі можна зіставити трійку чисел – його координати: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$.

Координати радіуса-вектора точки *M* називаються *координатами точки M* у розглянутій системі координат *M*(*x,y,z*).

Перша координата називається абсцисою, друга – ординатою, третя – аплікатою.

Аналогічно визначаються декартові координати на площині. Тут точка має тільки дві координати – абсцису й ординату.

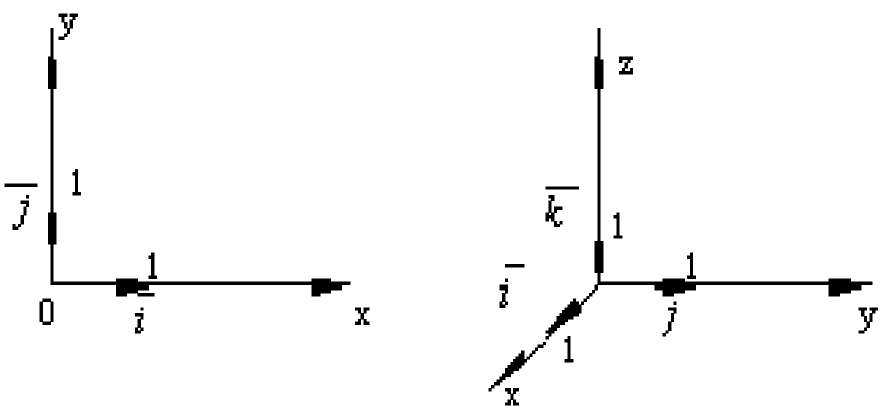


Рис. 3.19. Декартова прямокутна система координат

При заданій системі координат кожна точка має визначені координати. З іншого боку, для кожної трійки чисел знайдеться єдина точка, що має ці числа як координати.

Якщо вектори, узяті як базис, в обраній системі координат, мають одиничну довжину й попарно перпендикулярні, то система координат називається *декартовою прямокутною* системою координат. Основні вектори прийнято позначати буквами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а осі координат *Ox, Oy* і *Oz*, а будь-який вектор у цій системі координат можна записати у вигляді: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Приклади

Приклад 1. Побудувати на площині у декартовій системі координат вектор $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j}$. Вектор $\vec{a}$ приймемо за радіус-вектор точки $M(-1;3)$ (рис.3.20).

Приклад 2. Побудувати вектор $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Вектор $\vec{b}$ приймемо за радіус-вектор точки $N(2; -1; 3)$ (рис.3.21).

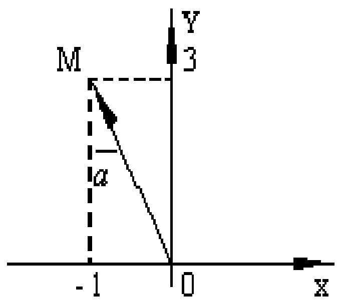


Рис. 3.20. Вектор $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j}$

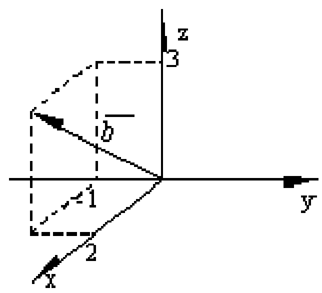


Рис. 3.21. Вектор $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

Надалі будемо використовувати тільки декартову прямокутну систему координат.

3.8. Напрямні косинуси вектора

Нехай у декартовій прямокутній системі координат заданий вектор $\vec{a}$. Напрямок вектора у просторі визначається кутами α, β, γ які вектор утворює з осями координат. Косинуси цих кутів $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються *напрямними косинусами* вектора.

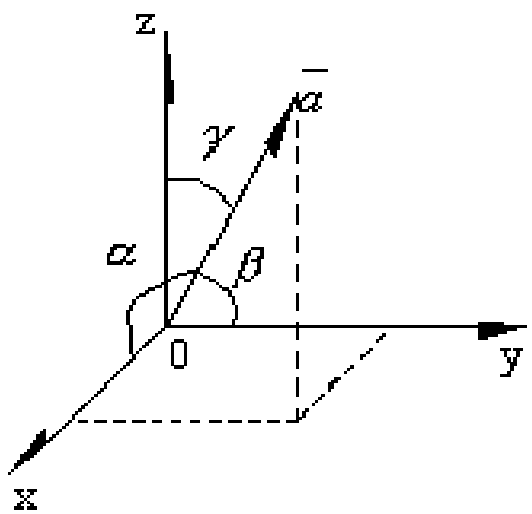


Рис. 3.22. Визначення вектора $\vec{a}$ у просторі кутами α, β, γ

Знайдемо вираз для напрямних косинусів вектора.

Нехай вектор заданий у координатній формі $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Тоді $x = np_{Ox}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha$, звідси $\cos\alpha = \dfrac{x}{\left|\vec{a}\right|}$.

$y = np_{Oy}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta$, звідси $\cos\beta = \dfrac{y}{\left|\vec{a}\right|}$.

$z = np_{Oz}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma$, звідси $\cos\gamma = \dfrac{z}{\left|\vec{a}\right|}$.

Нескладно довести, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Напрямні косинуси вектора цілком визначають його напрямок, але нічого не говорять про його довжину.

3.9. Лінійні операції над векторами у координатній формі

При **множенні** вектора на число всі його координати множаться на це число, тобто якщо $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то $\lambda\vec{a} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j} + \lambda z\vec{k} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

При **додаванні** векторів їхні відповідні координати складаються, тобто якщо $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ і $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.$$

Умова колінеарності двох векторів у координатній формі.

Два вектори колінеарні тоді й тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні. Тобто, якщо $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ і $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Приклади

Приклад 1. Дано вектори $\vec{a} = (2;3;5)$ і $\vec{b} = (3;-2;5)$. Знайти вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

◄ Знаходимо $2\vec{a} = 2 \cdot (2;3;5) = (4;6;10)$.

$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = (4;6;10) - (3;-2;5) = (1;8;5)$.►

Приклад 2. Написати розкладання вектора $\vec{x}$ за векторами $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$: $\vec{x} = \{4, 3, -12\}$, $\vec{p} = \{2, 1, -1\}$, $\vec{q} = \{1, 1, -1\}$, $\vec{r} = \{1, 1, -4\}$.

◄ Позначимо координати вектора $\vec{x}$ у новому базисі $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$. Тоді у новому базисі будемо мати: $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{p} + x_2 \cdot \vec{q} + x_3 \cdot \vec{r}$

Підставимо значення координат векторів із даних прикладу:

$(4;3;-12) = x_1 \cdot (2;1;-1) + x_2 \cdot (1;1;-1) + x_3 \cdot (1;1;-4)$.

Застосовуючи правило множення вектора на число маємо:

$(4;3;-12) = (2x_1;1x_1;-1x_1) + (1x_2;1x_2;-1x_2) + (1x_3;1x_3;-4x_3)$.

Застосовуючи правило додавання векторів маємо:

$(4;3;-12) = (2x_1 + x_2 + x_3; \quad x_1 + x_2 + x_3; \quad -x_1 - x_2 - 4x_3)$.

Це векторне рівняння відносно $x_1; x_2; x_3$ еквівалентно системі трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо змінних $x_1; x_2; x_3$ і, таким чином, визначаємо коефіцієнти розкладання вектора $\vec{x}$ за векторами $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$:

Розв'язуємо СЛАР, наприклад, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -3; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -12 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -12 & -4 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = -9$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3.$$

Отже, $\vec{x} = \vec{p} - \vec{q} + 3\vec{r}$. ►

3.10. Знаходження координат вектора

Розглянемо дві довільні точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$. Зрозуміло, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

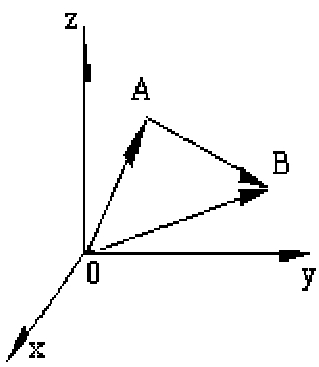


Рис. 3.23. Визначення координат вектора $\overrightarrow{AB}$

З визначення координат вектора $\overrightarrow{OA}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$ і $\overrightarrow{OB}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$.

$\overrightarrow{AB}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}-x_1\vec{i}-y_1\vec{j}-z_1\vec{k}=\left(x_2-x_1\right)\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\vec{j}+\left(z_2-z_1\right)\vec{k}$.

Таким чином, щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, потрібно з координат його кінця відняти відповідні координати початку.

Приклади

Приклад 1. Задано точки $A(1;\,-2;\,3)$, $B(2;\,0;\,-1)$. Знайти вектор $\overrightarrow{BA}$.

◄ З координат кінця вектора $\overrightarrow{BA}$, віднімемо відповідні координати початку: $\overrightarrow{BA}=\left(1;-2;3\right)-\left(2;0;-1\right)=\left(-1;-2;4\right)$.►

Приклад 2. Дано $A(-2;\,3;\,1)$, $B(-1;\,2;\,0)$, $C(0;\,1;\,1)$. Знайти $\vec{a}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

◄ $\overrightarrow{AB}=\left(1;-1;-1\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(2;-2;0\right)$.

$\vec{a}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\left(2;-2;-2\right)+\left(2;-2;0\right)=\left(4;-4;-2\right)$.►

Приклад 3. Відомо, що $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$. Знайти координати точки D, якщо $A(3;\,-4;\,-1)$, $B(-4;\,4;\,1)$, $C(-3;\,-5;\,4)$.

◄ Знайдемо $\overrightarrow{CA}=\left(6;1;-5\right)$, $\overrightarrow{CB}=\left(-1;9;3\right)$, тоді $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\left(5;10;-8\right)$.

Позначимо координати точки $D\left(x;y;z\right)$, тоді $\overrightarrow{CD}=\left(x+3;y+5;z-4\right)$. Отже, повинна виконуватись рівність $(x+3;\,y+5;\,z-4)=(5;10;-8)$.

Звідси $x=2$, $y=5$, $z=-4$, тобто точка D має координати $D(2;\,5;\,-4)$. ►

3.11. Індивідуальне завдання № 3.1

Студент повинен розв’язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Розкласти вектор $\vec{x}$ за векторами $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

1. $\mathbf{x}=\{-2,\ 4,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 2\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 2,\ 4\}$.

2. $\mathbf{x}=\{6,\ 12,\ -1\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 3,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{2,\ -1,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{0,\ -1,\ 2\}$.

3. $\mathbf{x}=\{1,\ -4,\ 4\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ 3,\ 2\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ -1,\ 1\}$.

4. $\mathbf{x}=\{-9,\ 5,\ 5\}$, $\mathbf{p}=\{4,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{2,\ 0,\ -3\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ 2,\ 1\}$.

5. $\mathbf{x}=\{-5,\ -5,\ 5\}$, $\mathbf{p}=\{-2,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ 3,\ -1\}$, $\mathbf{r}=\{0,\ 4,\ 1\}$.

6. $\mathbf{x}=\{13,\ 2,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{5,\ 1,\ 0\}$, $\mathbf{q}=\{2,\ -1,\ 3\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ 0,\ -1\}$.

7. $\mathbf{x}=\{-19,\ -1,\ 7\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{q}=\{-2,\ 0,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{3,\ 1,\ 0\}$.

8. $\mathbf{x}=\{3,\ -3,\ 4\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ 0,\ 2\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ 1,\ 1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ -1,\ 4\}$.

9. $\mathbf{x}=\{3,\ \ 3,\ \ -1\}$, $\mathbf{p}=\{3,\ \ 1,\ \ 0\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ \ 2,\ \ 1\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ \ 0,\ \ 2\}$.

10. $\mathbf{x}=\{-1,\ \ 7,\ \ -4\}$, $\mathbf{p}=\{-1,\ \ 2,\ \ 1\}$, $\mathbf{q}=\{2,\ \ 0,\ \ 3\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ \ 1,\ \ -1\}$.

11. $\mathbf{x}=\{6,\ \ 5,\ \ -14\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ 1,\ \ 4\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ \ -3,\ \ 2\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ \ 1,\ \ -1\}$.

12. $\mathbf{x}=\{6,\ \ -1,\ \ 7\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ -2,\ \ 0\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ \ 1,\ \ 3\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ \ 0,\ \ 4\}$.

13. $\mathbf{x}=\{5,\ \ 15,\ \ 0\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ 0,\ \ 5\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ \ 3,\ \ 2\}$, $\mathbf{r}=\{0,\ \ -1,\ \ 1\}$.

14. $\mathbf{x}=\{2,\ \ -1,\ \ 11\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ 1,\ \ 0\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ \ 1,\ \ -2\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ \ 0,\ \ 3\}$.

15. $\mathbf{x}=\{11,\ \ 5,\ \ -3\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ 0,\ \ 2\}$, $\mathbf{q}=\{-1,\ \ 0,\ \ 1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ \ 5,\ \ -3\}$.

16. $\mathbf{x}=\{8,\ \ 0,\ \ 5\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ \ 0,\ \ 1\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ \ 1,\ \ 0\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ \ 1,\ \ 2\}$.

17. $\mathbf{x}=\{3,\ \ 1,\ \ 8\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ \ 1,\ \ 3\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ \ 2,\ \ -1\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ \ 0,\ \ -1\}$.

18. $\mathbf{x}=\{8,\ \ 1,\ \ 12\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ 2,\ \ -1\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ \ 0,\ \ 2\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ \ 1,\ \ 1\}$.

19. $\mathbf{x}=\{-9,\ \ -8,\ \ -3\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ 4,\ \ 1\}$, $\mathbf{q}=\{-3,\ \ 2,\ \ 0\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ \ -1,\ \ 2\}$.

20. $\mathbf{x}=\{-5,\ \ 9,\ \ -13\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ \ 1,\ \ -2\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ \ -1,\ \ 1\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ \ 1,\ \ 0\}$.

21. $\mathbf{x}=\{-15,\ \ 5,\ \ 6\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ \ 5,\ \ 1\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ \ 2,\ \ -1\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ \ 1,\ \ 0\}$.

22. $\mathbf{x}=\{8,\ \ 9,\ \ 4\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ 0,\ \ 1\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ \ -2,\ \ 1\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ \ 3,\ \ 0\}$.

23. $\mathbf{x}=\{23,\ \ -14,\ \ -30\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ \ 1,\ \ 0\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ \ -1,\ \ 0\}$, $\mathbf{r}=\{-3,\ \ 2,\ \ 5\}$.

24. $\mathbf{x}=\{3,\ \ 1,\ \ 3\}$, $\mathbf{p}=\{2,\ \ 1,\ \ 0\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ \ 0,\ \ 1\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ \ 2,\ \ 1\}$.

25. $\mathbf{x}=\{-1,\ \ 7,\ \ 0\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ \ 3,\ \ 1\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ \ -1,\ \ 2\}$, $\mathbf{r}=\{2,\ \ -1,\ \ 0\}$.

26. $\mathbf{x}=\{11,\ \ -1,\ \ 4\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ -1,\ \ 2\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ \ 2,\ \ 0\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ \ 1,\ \ 1\}$.

27. $\mathbf{x}=\{-13,\ \ 2,\ \ 18\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ 1,\ \ 4\}$, $\mathbf{q}=\{-3,\ \ 0,\ \ 2\}$, $\mathbf{r}=\{1,\ \ 2,\ \ -1\}$.

28. $\mathbf{x}=\{0,\ \ -8,\ \ 9\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ \ -2,\ \ 1\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ \ 1,\ \ -1\}$, $\mathbf{r}=\{4,\ \ 0,\ \ 1\}$.

29. $\mathbf{x}=\{8,\ \ -7,\ \ -13\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ \ 1,\ \ 5\}$, $\mathbf{q}=\{3,\ \ -1,\ \ 2\}$, $\mathbf{r}=\{-1,\ \ 0,\ \ 1\}$.

30. $\mathbf{x}=\{2,\ \ 7,\ \ 5\}$, $\mathbf{p}=\{1,\ \ 0,\ \ 1\}$, $\mathbf{q}=\{1,\ \ -2,\ \ 0\}$, $\mathbf{r}=\{0,\ \ 3,\ \ 1\}$.

31. $\mathbf{x}=\{15,\ \ -20,\ \ -1\}$, $\mathbf{p}=\{0,\ \ 2,\ \ 1\}$, $\mathbf{q}=\{0,\ \ 1,\ \ -1\}$, $\mathbf{r}=\{5,\ \ -3,\ \ 2\}$.

3.12. Індивідуальне завдання № 3.2

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

З'ясувати колінеарність або неколінеарність векторів $\mathbf{c}_1$ і $\mathbf{c}_2$, побудованих із векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a}=\{1,\ \ -2,\ \ 3\}$, $\mathbf{b}=\{3,\ \ 0,\ \ -1\}$, $\mathbf{c}_1=2\mathbf{a}+4\mathbf{b}$, $\mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

2. $\mathbf{a}=\{1,\quad 0,\quad 1\},\quad \mathbf{b}=\{-2,\quad 3,\quad 5\},\quad \mathbf{c}_1=\mathbf{a}+2\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-\mathbf{b}.$

3. $\mathbf{a}=\{-2,\quad 4,\quad 1\},\quad \mathbf{b}=\{1,\quad -2,\quad 7\},\quad \mathbf{c}_1=5\mathbf{a}+3\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=2\mathbf{a}-\mathbf{b}.$

4. $\mathbf{a}=\{1,\quad 2,\quad -3\},\quad \mathbf{b}=\{2,\quad -1,\quad -1\},\quad \mathbf{c}_1=4\mathbf{a}+3\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=8\mathbf{a}-\mathbf{b}.$

5. $\mathbf{a}=\{3,\quad 5,\quad 4\},\quad \mathbf{b}=\{5,\quad 9,\quad 7\},\quad \mathbf{c}_1=-2\mathbf{a}+\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}.$

6. $\mathbf{a}=\{1,\quad 4,\quad -2\},\quad \mathbf{b}=\{1,\quad 1,\quad -1\},\quad \mathbf{c}_1=\mathbf{a}+\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=4\mathbf{a}+2\mathbf{b}.$

7. $\mathbf{a}=\{1,\quad -2,\quad 5\},\quad \mathbf{b}=\{3,\quad -1,\quad 0\},\quad \mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}.$

8. $\mathbf{a}=\{3,\quad 4,\quad -1\},\quad \mathbf{b}=\{2,\quad -1,\quad 1\},\quad \mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-3\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}.$

9. $\mathbf{a}=\{-2,\quad -3,\quad -2\},\quad \mathbf{b}=\{1,\quad 0,\quad 5\},\quad \mathbf{c}_1=3\mathbf{a}+9\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=-\mathbf{a}-3\mathbf{b}.$

10. $\mathbf{a}=\{-1,\quad 4,\quad 2\},\quad \mathbf{b}=\{3,\quad -2,\quad 6\},\quad \mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-6\mathbf{a}.$

11. $\mathbf{a}=\{5,\quad 0,\quad -1\},\quad \mathbf{b}=\{7,\quad 2,\quad 3\},\quad \mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=3\mathbf{b}-6\mathbf{a}.$

12. $\mathbf{a}=\{0,\quad 3,\quad -2\},\quad \mathbf{b}=\{1,\quad -2,\quad 1\},\quad \mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-2\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+5\mathbf{b}.$

13. $\mathbf{a}=\{-2,\quad 7,\quad -1\},\quad \mathbf{b}=\{-3,\quad 5,\quad 2\},\quad \mathbf{c}_1=2\mathbf{a}+3\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+2\mathbf{b}.$

14. $\mathbf{a}=\{3,\quad 7,\quad 0\},\quad \mathbf{b}=\{1,\quad -3,\quad 4\},\quad \mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}.$

15. $\mathbf{a}=\{-1,\quad 2,\quad -1\},\quad \mathbf{b}=\{2,\quad -7,\quad 1\},\quad \mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-2\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=\mathbf{b}-3\mathbf{a}.$

16. $\mathbf{a}=\{7,\quad 9,\quad -2\},\quad \mathbf{b}=\{5,\quad 4,\quad 3\},\quad \mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=4\mathbf{b}-\mathbf{a}.$

17. $\mathbf{a}=\{5,\quad 0,\quad -2\},\quad \mathbf{b}=\{6,\quad 4,\quad 3\},\quad \mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-3\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=6\mathbf{b}-10\mathbf{a}.$

18. $\mathbf{a}=\{8,\quad 3,\quad -1\},\quad \mathbf{b}=\{4,\quad 1,\quad 3\},\quad \mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=2\mathbf{b}-4\mathbf{a}.$

19. $\mathbf{a}=\{3,\quad -1,\quad 6\},\quad \mathbf{b}=\{5,\quad 7,\quad 10\},\quad \mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-2\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}.$

20. $\mathbf{a}=\{1,\quad -2,\quad 4\},\quad \mathbf{b}=\{7,\quad 3,\quad 5\},\quad \mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-3\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=\mathbf{b}-2\mathbf{a}.$

21. $\mathbf{a}=\{3,\quad 7,\quad 0\},\quad \mathbf{b}=\{4,\quad 6,\quad -1\},\quad \mathbf{c}_1=3\mathbf{a}+2\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=5\mathbf{a}-7\mathbf{b}.$

22. $\mathbf{a}=\{2,\quad -1,\quad 4\},\quad \mathbf{b}=\{3,\quad -7,\quad -6\},\quad \mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-3\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=3\mathbf{a}-2\mathbf{b}.$

23. $\mathbf{a}=\{5,\quad -1,\quad -2\},\quad \mathbf{b}=\{6,\quad 0,\quad 7\},\quad \mathbf{c}_1=3\mathbf{a}-2\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=4\mathbf{b}-6\mathbf{a}.$

24. $\mathbf{a}=\{-9,\quad 5,\quad 3\},\quad \mathbf{b}=\{7,\quad 1,\quad -2\},\quad \mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=3\mathbf{a}+5\mathbf{b}.$

25. $\mathbf{a}=\{4,\quad 2,\quad 9\},\quad \mathbf{b}=\{0,\quad -1,\quad 3\},\quad \mathbf{c}_1=4\mathbf{b}-3\mathbf{a},\quad \mathbf{c}_2=4\mathbf{a}-3\mathbf{b}.$

26. $\mathbf{a}=\{2,\quad -1,\quad 6\},\quad \mathbf{b}=\{-1,\quad 3,\quad 8\},\quad \mathbf{c}_1=5\mathbf{a}-2\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=2\mathbf{a}-5\mathbf{b}.$

27. $\mathbf{a}=\{5,\quad 0,\quad 8\},\quad \mathbf{b}=\{-3,\quad 1,\quad 7\},\quad \mathbf{c}_1=3\mathbf{a}-4\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=12\mathbf{b}-9\mathbf{a}.$

28. $\mathbf{a}=\{-1,\quad 3,\quad 4\},\quad \mathbf{b}=\{2,\quad -1,\quad 0\},\quad \mathbf{c}_1=6\mathbf{a}-2\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=\mathbf{b}-3\mathbf{a}.$

29. $\mathbf{a}=\{4,\quad 2,\quad -7\},\quad \mathbf{b}=\{5,\quad 0,\quad -3\},\quad \mathbf{c}_1=\mathbf{a}-3\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=6\mathbf{b}-2\mathbf{a}.$

30. $\mathbf{a}=\{2,\quad 0,\quad -5\},\quad \mathbf{b}=\{1,\quad -3,\quad 4\},\quad \mathbf{c}_1=2\mathbf{a}-5\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=5\mathbf{a}-2\mathbf{b}.$

31. $\mathbf{a}=\{-1,\quad 2,\quad 8\},\quad \mathbf{b}=\{3,\quad 7,\quad -1\},\quad \mathbf{c}_1=4\mathbf{a}-3\mathbf{b},\quad \mathbf{c}_2=9\mathbf{b}-12\mathbf{a}.$

3.13. Скалярний добуток векторів і його властивості

Вище ми розглянули множення вектора на число. Але у багатьох задачах зустрічається операція множення вектора на вектор. Але при цьому результат може бути як числом, так і вектором. Тому розглядають два види множення векторів: скалярне й векторне.

Нехай дані два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між якими дорівнює $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, рівне добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Отже, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$.

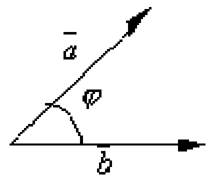


Рис. 3.24. Скалярний добуток векторів

Якщо один із векторів нульовий, то скалярний добуток вважається рівним нулю.

Розглянемо **властивості** скалярного добутку.

1. Скалярний добуток двох векторів підкоряється комутативному законові, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. Для будь-якого числа λ і будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маємо:

$$\lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\lambda\vec{b}\right).$$

3. Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ виконується рівність:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

4. Для будь-якого вектора $\vec{a}$ виконується співвідношення $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$.

Із цієї властивості зокрема випливає $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = a$.

5. Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли дорівнює нулю один зі співмножників або вектори перпендикулярні.

Це властивість очевидна з визначення скалярного добутку.

Таким чином, **необхідною й достатньою умовою ортогональності** двох ненульових векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку.

Приклад

Дано вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Відомо, що $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\widehat{\vec{a};\vec{b}} = 60^0$. Знайти $\left|\vec{c}\right|$.

◄ Маємо $\vec{c}^{\,2} = \left|\vec{c}\right|^2$, тобто $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}}$.

Знайдемо:

$\vec{c}^{\,2}=\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)^2=4\vec{a}^{\,2}+12\vec{a}\vec{b}+9\vec{b}^{\,2}$. З визначення скалярного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ випливає, що $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$, тому:

$$\vec{c}^{\,2}=4\left|\vec{a}\right|^2+12\vec{a}\vec{b}\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)+9\left|\vec{b}\right|^2=64+72+81=217.$$

Отже, $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{217}$. ►

3.14. Довжина вектора. Кут між векторами. Умова ортогональності двох векторів

Розглянемо, як знаходиться скалярний добуток векторів, якщо вони задані у координатній формі. Нехай дані два вектори $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ і $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$.

Розглянемо спочатку всі можливі скалярні добутки векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Оскільки ці вектори взаємно перпендикулярні, то їхні добутки один на одного дорівнюють нулю, за винятком множення вектора на самого себе. Результати зводимо у таблицю 3.1:

Таблиця 3.1

Скалярні добутки векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

$\cdot$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

Повернемося тепер до скалярного добутку двох векторів:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\cdot\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$$

$$=x_1x_2\vec{i}^{\,2}+x_1y_2\vec{i}\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\vec{k}+y_1x_2\vec{j}\vec{i}+y_1y_2\vec{j}^{\,2}+y_1z_2\vec{j}\vec{k}+z_1x_2\vec{k}\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\vec{j}+z_1z_2\vec{k}^{\,2}=$$

$$=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2.$$

Отже, скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків відповідних координат: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$.

Це співвідношення дозволяє обчислити довжину вектора через його координати: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

Далі з визначення скалярного добутку $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$ знаходимо

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Виражаючи скалярний добуток і довжини векторів через їхні координати, одержимо формулу для знаходження косинуса кута між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Умова ортогональності двох векторів у координатній формі:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \text{ або } a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Таким чином, для того щоб два вектори були перпендикулярні необхідно й достатньо, щоб сума добутків відповідних координат цих векторів дорівнювала нулю.

Приклади

Приклад 1. Нехай $A(-1;\ 1;\ 0)$, $B(3;\ 1;\ -2)$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$. Знайти: $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $|\vec{a}|$ і $|\vec{b}|$; $\cos\varphi$.

◄ $\vec{a} = (3+1;1-1;-2) = (4;0;-2)$; $\vec{b} = (2;0;-3)$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 2 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot(-3) = 8 + 6 = 14$.

$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{7}{\sqrt{65}}$.►

Приклад 2. Знайти кут B у трикутнику ABC, якщо відомі координати його вершин $A(1;\ 5;\ 6)$, $B(5;\ 3;\ 10)$, $C(2;\ 1;\ 14)$.

◄ $\angle B = \left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$

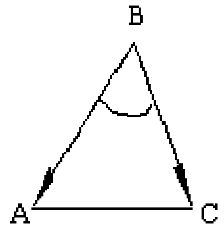


Рис. 3.25. Кут між векторами $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA} = (1-5;5-3;6-10) = (-4;2;-4)$; $\overrightarrow{BC} = (2-5;1-3;14-10) = (-3;-2;4)$.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-4)\cdot(-3) + 2\cdot(-2) + (-4)\cdot 4 = 12 - 4 - 16 = -8$.

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-8}{6\sqrt{29}} = -\frac{4}{3\sqrt{29}}.\quad \varphi = \arccos\left(-\frac{4}{3\sqrt{29}}\right) = 104^0. \blacktriangleright$$

Приклад 3. При якому значенні m вектори $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + m\vec{k}$ перпендикулярні?

◄ З умови ортогональності двох векторів $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot m - 15 - m = 0$

Отже, m = 15. ►

3.15. Індивідуальне завдання № 3.3

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ і $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$.

1. $A(1,\ -2,\ 3),\ B(0,\ -1,\ 2),\ C(3,\ -4,\ 5)$.

2. $A(0,\ -3,\ 6),\ B(-12,\ -3,\ -3),\ C(-9,\ -3,\ -6)$.

3. $A(3,\ 3,\ -1),\ B(5,\ 5,\ -2),\ C(4,\ 1,\ 1)$.

4. $A(-1,\ 2,\ -3),\ B(3,\ 4,\ -6),\ C(1,\ 1,\ -1)$.

5. $A(-4,\ -2,\ 0),\ B(-1,\ -2,\ 4),\ C(3,\ -2,\ 1)$.

6. $A(5,\ 3,\ -1),\ B(5,\ 2,\ 0),\ C(6,\ 4,\ -1)$.

7. $A(-3,\ -7,\ -5),\ B(0,\ -1,\ -2),\ C(2,\ 3,\ 0)$.

8. $A(2,\ -4,\ 6),\ B(0,\ -2,\ 4),\ C(6,\ -8,\ 10)$.

9. $A(0,\ 1,\ -2),\ B(3,\ 1,\ 2),\ C(4,\ 1,\ 1)$.

10. $A(3,\ 3,\ -1),\ B(1,\ 5,\ -2),\ C(4,\ 1,\ 1)$.

11. $A(2,\ 1,\ -1),\ B(6,\ -1,\ -4),\ C(4,\ 2,\ 1)$.

12. $A(-1,\ -2,\ 1),\ B(-4,\ -2,\ 5),\ C(-8,\ -2,\ 2)$.

13. $A(6,\ 2,\ -3),\ B(6,\ 3,\ -2),\ C(7,\ 3,\ -3)$.

14. $A(0,\ 0,\ 4),\ B(-3,\ -6,\ 1),\ C(-5,\ -10,\ -1)$.

15. $A(2,\ -8,\ -1),\ B(4,\ -6,\ 0),\ C(-2,\ -5,\ -1)$.

16. $A(3,\ -6,\ 9),\ B(0,\ -3,\ 6),\ C(9,\ -12,\ 15)$.

17. $A(0,\ 2,\ -4),\ B(8,\ 2,\ 2),\ C(6,\ 2,\ 4)$.

18. $A(3,\ 3,\ -1),\ B(5,\ 1,\ -2),\ C(4,\ 1,\ 1)$.

19. $A(-4,\ 3,\ 0),\ B(0,\ 1,\ 3),\ C(-2,\ 4,\ -2)$.

20. $A(1,\ \ -1,\ \ 0),\ \ B(-2,\ \ -1,\ \ 4),\ \ C(8,\ \ -1,\ \ -1).$

21. $A(7,\ \ 0,\ \ 2),\ \ B(7,\ \ 1,\ \ 3),\ \ C(8,\ \ -1,\ \ 2).$

22. $A(2,\ \ 3,\ \ 2),\ \ B(-1,\ \ -3,\ \ -1),\ \ C(-3,\ \ -7,\ \ -3).$

23. $A(2,\ \ 2,\ \ 7),\ \ B(0,\ \ 0,\ \ 6),\ \ C(-2,\ \ 5,\ \ 7).$

24. $A(-1,\ \ 2,\ \ -3),\ \ B(0,\ \ 1,\ \ -2),\ \ C(-3,\ \ 4,\ \ -5).$

25. $A(0,\ \ 3,\ \ -6),\ \ B(9,\ \ 3,\ \ 6),\ \ C(12,\ \ 3,\ \ 3).$

26. $A(3,\ \ 3,\ \ -1),\ \ B(5,\ \ 1,\ \ -2),\ \ C(4,\ \ 1,\ \ -3).$

27. $A(-2,\ \ 1,\ \ 1),\ \ B(2,\ \ 3,\ \ -2),\ \ C(0,\ \ 0,\ \ 3).$

28. $A(1,\ \ 4,\ \ -1),\ \ B(-2,\ \ 4,\ \ -5),\ \ C(8,\ \ 4,\ \ 0).$

29. $A(0,\ \ 1,\ \ 0),\ \ B(0,\ \ 2,\ \ 1),\ \ C(1,\ \ 2,\ \ 0).$

30. $A(-4,\ \ 0,\ \ 4),\ \ B(-1,\ \ 6,\ \ 7),\ \ C(1,\ \ 10,\ \ 9).$

31. $A(-2,\ \ 4,\ \ -6),\ \ B(0,\ \ 2,\ \ -4),\ \ C(-6,\ \ 8,\ \ -10).$

3.16. Векторний добуток векторів і його властивості

Введемо спочатку поняття орієнтації трійки векторів.

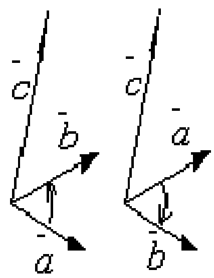


Рис. 3.26. Види трійок векторів (права й ліва)

Нехай дано три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ із загальним початком, перелічених у визначеному порядку: перший – $\vec{a}$, другий – $\vec{b}$, третій – $\vec{c}$.

Трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається *право орієнтованою* або просто *правою*, якщо з кінця третього вектора найкоротший поворот від першого до другого видний проти годинникової стрілки. У противному випадку трійку векторів називають *лівою*, у цьому випадку якщо ми будемо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ здійснюється за рухом годинникової стрілки.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається новий вектор $\vec{c}$, що задовольняє умовам:

1. Довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний площини цього паралелограма.

3. Вектор $\vec{c}$ спрямований так, що вектори $\vec{a}$ й $\vec{b}$ утворять праву трійку векторів.

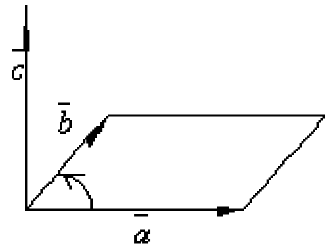


Рис. 3.27. Векторний добуток векторів

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається символом $\vec{a}\times\vec{b}$. Якщо хоча б один зі співмножників дорівнює нулю, то векторний добуток за визначенням вважають таким, що дорівнює нулю.

Векторний добуток має наступні **властивості:**

1. З визначення випливає, що величина векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах, і, отже, знаходиться за формулою: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$.

Таким чином, площа паралелограма побудованого з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $S_{\text{пар.}} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$. А площа трикутника побудованого з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $S_{\text{тр-ка.}} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$.

2. Скалярний множник можна виносити за знак векторного добутку, тобто для будь-якого числа λ і будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right).$$

3. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ має місце рівність:
$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$.

4. При перестановці співмножників векторний добуток змінює свій знак: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

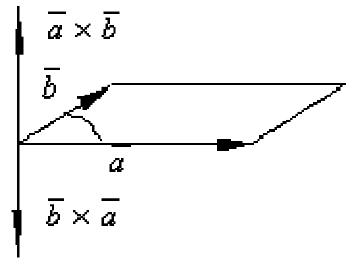


Рис. 3.28. Зміна знаку при перестановці співмножників

5. Векторний добуток двох векторів дорівнює нульовому векторові тоді й тільки тоді, коли один зі співмножників дорівнює нулю або вектори колінеарні.

Умова колінеарності двох ненульових векторів

Таким чином, для того щоб два ненульових вектори були колінеарні, необхідно й достатньо, щоб їхній векторний добуток дорівнював нульовому векторові. Зокрема $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

Можна довести, що якщо $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ і $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то координати векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ знаходяться за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.$$

<u>Приклади</u>

<u>Приклад 1.</u> Розкрити дужки $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$.

◄ $\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=2\vec{a}\times\vec{a}-2\vec{a}\times2\vec{b}+3\vec{b}\times\vec{a}-3\vec{b}\times2\vec{b}$

Оскільки $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ і $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$, то:

$\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=-4\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{a}\times\vec{b}=-7\vec{a}\times\vec{b}$, або $7\vec{b}\times\vec{a}$. ►

<u>Приклад 2.</u> Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$ і $\widehat{\vec{a};\vec{b}}=\dfrac{\pi}{6}$.

◄ $S_{\text{тр-ка.}}=\dfrac{1}{2}\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$.

Знайдемо $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}=\left(2\vec{a}\right)\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}=\left(2\vec{a}\right)\times\vec{b}$

Оскільки $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, то

$S_{\text{тр-ка.}}=\dfrac{1}{2}\left|\left(2\vec{a}\right)\times\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=1\cdot2\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$. ►

<u>Приклад 3.</u> Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ і $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$.

◄ $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-13\vec{i}+5\vec{j}-11\vec{k}$. ►

Приклад 4. Знайти площу трикутника ABC, якщо $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(-1;\ -2;\ 0)$, $C(-3;\ 0;\ 1)$.

◄ $S_{\text{тр-ка.}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$; $\quad\overrightarrow{AB}=\left(-1-2;-2-3;-1\right)=\left(-3;-5;-1\right)$;

$\overrightarrow{AC}=\left(-3-2;-3;1-1\right)=\left(-5;-3;0\right)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&-5&-1\\-5&-3&0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5&-1\\-3&0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-3&-1\\-5&0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-3&5\\-5&3\end{vmatrix}=3\vec{i}-5\vec{j}+16\vec{k}.$$

Оскільки довжина вектора через його координати обчислюється як $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$, то $S_{\text{тр-ка.}}=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+5^2+16^2}=\frac{1}{2}\sqrt{290}$. ►

Приклад 5. Дани вектори $\vec{a}=\left(n,p,-1\right)$, $\vec{b}=\left(4p,-q,2\right)$, $\vec{c}=\left(8,13,-3\right)$. Знайти параметри *n, p, q* якщо відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, а вектори $\vec{b}$ й $\vec{c}$ ортогональні.

◄ Оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то їхні відповідні координати пропорційні, значить: $\frac{n}{4p}=\frac{p}{-q}=\frac{-1}{2}$. Із цього співвідношення можна одержати два рівняння: $\left(\frac{p}{-q}=\frac{-1}{2}\right)\Rightarrow\left(2p=q\right)$ і $\left(\frac{n}{4p}=\frac{-1}{2}\right)\Rightarrow\left(2n=-4p\right)$.

Вектори $\vec{b}$ й $\vec{c}$ ортогональні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто:

$\vec{b}\cdot\vec{c}=4p\cdot8-q\cdot13-2\cdot3=0$ або $32p-13q-6=0$.

Таким чином, маємо систему рівнянь, розв'язуючи яку знаходимо параметри *n, p, q*.

$$\begin{cases}n=-2p\\2p=q\\32p-13q-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=-2p\\32p=16q\\16q-13q=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=-2,\\p=1,\\q=2.\end{cases}$$ ►

Приклад 6. Знайти площу паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}=\mu_1\vec{p}+\eta_1\vec{q}$ і $\vec{b}=\mu_2\vec{p}+\eta_2\vec{q}$, де

$\mu_1=6$; $\mu_2=1$; $\eta_1=-1$; $\eta_2=2$; $\left|\vec{p}\right|=8$; $\left|\vec{q}\right|=1/2$; $\left(\widehat{\vec{p}\vec{q}}\right)=\pi/3$.

◄ Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, чисельно дорівнює модулеві їхнього векторного добутку $S_{\text{парал}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

Обчислюємо векторний добуток $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\mu_1\vec{p}+\eta_1\vec{q})\times(\mu_2\vec{p}+\eta_2\vec{q})=\mu_1\mu_2\vec{p}\times\vec{p}+\mu_1\eta_2\vec{p}\times\vec{q}+\mu_2\eta_1\vec{q}\times\vec{p}+\eta_1\eta_2\vec{q}\times\vec{q}$$

З огляду на алгебраїчні властивості векторного добутку маємо:

$\vec{p}\times\vec{q}=-\vec{q}\times\vec{p}$ (антиперестановочна властивість співмножників) і $\vec{p}\times\vec{p}=\vec{q}\times\vec{q}=0$.

Тому: $a\times b=\mu_1\eta_2 p\times q-\mu_2\eta_1 p\times q=(\mu_1\eta_2-\mu_2\eta_1)p\times q$.

Знаходимо площу паралелограма, використовуючи визначення векторного добутку:

$$S_{\text{парал}}=|\mu_1\eta_2-\mu_2\eta_1|\cdot|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right).$$

Підставляючи данні задачі маємо:

$$S_{\text{парал}}=|6\cdot 2-1\cdot(-1)|\cdot 8\cdot {}^{1}\!/_{2}\cdot\sin{}^{\pi}\!/_{3}=13\cdot 4\cdot{}^{\sqrt{3}}\!/_{2}=26\sqrt{3}\,.$$ ►

3.17. Індивідуальне завдання № 3.4

Студент повинен розв’язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Знайти площу паралелограма побудованого на векторах $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+2\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=3\mathbf{p}-\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=1,\ \ |\mathbf{q}|=2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/6.$

2. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=4,\ \ |\mathbf{q}|=1,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/4.$

3. $\mathbf{a}=\mathbf{p}-3\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=1/5,\ \ |\mathbf{q}|=1,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/2.$

4. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}-2\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+5\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=4,\ \ |\mathbf{q}|=1/2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=5\pi/6.$

5. $\mathbf{a}=\mathbf{p}-2\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=2\mathbf{p}+\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=2,\ \ |\mathbf{q}|=3,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=3\pi/4.$

6. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+3\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=2,\ \ |\mathbf{q}|=3,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/3.$

7. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}-\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+3\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=3,\ \ |\mathbf{q}|=2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/2.$

8. $\mathbf{a}=4\mathbf{p}+\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=7,\ \ |\mathbf{q}|=2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/4.$

9. $\mathbf{a}=\mathbf{p}-4\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=3\mathbf{p}+\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=1,\ \ |\mathbf{q}|=2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/6.$

10. $\mathbf{a}=\mathbf{p}+4\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=2\mathbf{p}-\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=7,\ \ |\mathbf{q}|=2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/3.$

11. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}+2\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=10,\ \ |\mathbf{q}|=1,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/2.$

12. $\mathbf{a}=4\mathbf{p}-\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=5,\ \ |\mathbf{q}|=4,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/4.$

13. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+3\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=6,\ \ |\mathbf{q}|=7,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/3.$

14. $\mathbf{a}=3\mathbf{p}-\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}+2\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=3,\ \ |\mathbf{q}|=4,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/3.$

15. $\mathbf{a}=2\mathbf{p}+3\mathbf{q},\ \ \mathbf{b}=\mathbf{p}-2\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}|=2,\ \ |\mathbf{q}|=3,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q})=\pi/4.$

16. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 4,\ \ |\mathbf{q}| = 1,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/6.$

17. $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} + \mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 1,\ \ |\mathbf{q}| = 2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/3.$

18. $\mathbf{a} = 7\mathbf{p} - 2\mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 1/2,\ \ |\mathbf{q}| = 2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/2.$

19. $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 3,\ \ |\mathbf{q}| = 4,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/4.$

20. $\mathbf{a} = 10\mathbf{p} + \mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = 3\mathbf{p} - 2\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 4,\ \ |\mathbf{q}| = 1,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/6.$

21. $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 8,\ \ |\mathbf{q}| = 1/2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/3.$

22. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 4\mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = \mathbf{q} - \mathbf{p};\ \ |\mathbf{p}| = 2{,}5,\ \ |\mathbf{q}| = 2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/2.$

23. $\mathbf{a} = 7\mathbf{p} + \mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 3,\ \ |\mathbf{q}| = 1,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = 3\pi/4.$

24. $\mathbf{a} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = 3\mathbf{p} - \mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 3,\ \ |\mathbf{q}| = 5,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = 2\pi/3.$

25. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + \mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} - 3\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 7,\ \ |\mathbf{q}| = 2,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/4.$

26. $\mathbf{a} = 5\mathbf{p} - \mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 5,\ \ |\mathbf{q}| = 3,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = 5\pi/6.$

27. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} - 4\mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} + 3\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 2,\ \ |\mathbf{q}| = 3,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/4.$

28. $\mathbf{a} = 6\mathbf{p} - \mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = 5\mathbf{q} + \mathbf{p};\ \ |\mathbf{p}| = 1/2,\ \ |\mathbf{q}| = 4,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = 5\pi/6.$

29. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + 3\mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 2,\ \ |\mathbf{q}| = 1,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/3.$

30. $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} - 3\mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = 5\mathbf{p} + \mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 2,\ \ |\mathbf{q}| = 3,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = \pi/2.$

31. $\mathbf{a} = 3\mathbf{p} + 2\mathbf{q},\ \ \mathbf{b} = 2\mathbf{p} - \mathbf{q};\ \ |\mathbf{p}| = 4,\ \ |\mathbf{q}| = 3,\ \ (\mathbf{p}\hat{\ }\mathbf{q}) = 3\pi/4.$

3.18. Мішаний добуток векторів і його властивості

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають число, отримане *векторним* множенням перших двох векторів, з наступним *скалярним* множенням отриманого вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на третій вектор $\vec{c}$. Позначається мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Зрозуміло, такий добуток є число.

Розглянемо властивості мішаного добутку.

1. *Геометричний зміст* мішаного добутку. Мішаний добуток трьох векторів із точністю до знака дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, як на ребрах, тобто $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \pm V_{\text{парал}}$.

Таким чином, об'єм паралелепіпеда $V_{\text{парал}} = \left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|$,

і об'єм піраміди (тетраедра) $V_{\text{пирам}} = \dfrac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|$.

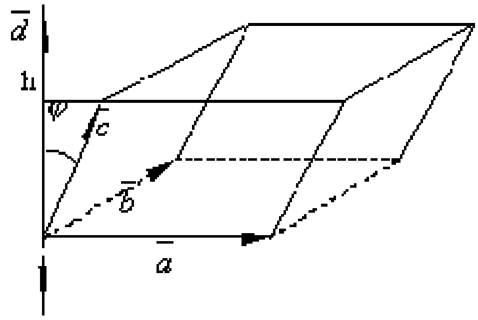


Рис. 3.29. Геометричний зміст мішаного добутку

Якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ права, то мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)>0$, а якщо $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – ліва, то $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)<0$.

2. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справедлива рівність:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

3. При перестановці будь-яких двох співмножників мішаний добуток змінює знак.

Дійсно, якщо розглянемо мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$, то, наприклад, $\left(\vec{b}\vec{a}\vec{c}\right)=\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

4. Мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=0$ тоді і тільки тоді, коли один зі співмножників дорівнює нулю або вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні.

5. Якщо вектори задані у координатній формі $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ й $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ і $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, то можна довести, що їхній мішаний добуток знаходиться за формулою:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Таким чином, мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ дорівнює визначникові третього порядку, рядки якого складаються з координат першого, другого і третього векторів.

Умова компланарності трьох ненульових векторів

Із властивостей мішаного добутку, необхідною й достатньою **умовою компланарності трьох векторів** є рівність нулю їхнього мішаного добутку. Крім того, звідси випливає, що три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис у просторі, якщо $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\neq 0$.

Приклади

Приклад 1. Знайти об’єм піраміди з вершинами у точках $A(2;\ -2;\ 0)$, $B(-1;\ 4;\ -4)$, $C(4;\ -8;\ 5)$, $D(1;\ -7;\ 0)$. Праву або ліву трійку утворять вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$?

◀ $V_{\text{пирам}} = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)\right|$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 2 & -6 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -6 - 35 = -41.$$

$$V_{\text{пирам}} = \frac{1}{6}\left|-41\right| = \frac{41}{6} = 6\frac{5}{6}.$$

Так як $\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right) < 0$, то трійка векторів ліва. ▶

Приклад 2. З'ясувати компланарні або некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, де $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

◀ $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарні. ▶

3.19. Індивідуальне завдання № 3.5

Студент повинен розв’язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

З'ясувати компланарні чи некомпланарні вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$?

1. $\mathbf{a} = \{2,\ 3,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{-1,\ 0,\ -1\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ 2,\ 2\}$.

2. $\mathbf{a} = \{3,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{2,\ 3,\ 4\}$, $\mathbf{c} = \{3,\ 1,\ -1\}$.

3. $\mathbf{a} = \{1,\ 5,\ 2\}$, $\mathbf{b} = \{-1,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{c} = \{1,\ 1,\ 1\}$.

4. $\mathbf{a} = \{1,\ -1,\ -3\}$, $\mathbf{b} = \{3,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ 3,\ 4\}$.

5. $\mathbf{a} = \{3,\ 3,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ -2,\ 1\}$, $\mathbf{c} = \{1,\ 1,\ 1\}$.

6. $\mathbf{a} = \{3,\ 1,\ -1\}$, $\mathbf{b} = \{-2,\ -1,\ 0\}$, $\mathbf{c} = \{5,\ 2,\ -1\}$.

7. $\mathbf{a} = \{4,\ 3,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ -2,\ 1\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ 2,\ 2\}$.

8. $\mathbf{a} = \{4,\ 3,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{6,\ 7,\ 4\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ 0,\ -1\}$.

9. $\mathbf{a} = \{3,\ 2,\ 1\}$, $\mathbf{b} = \{1,\ -3,\ -7\}$, $\mathbf{c} = \{1,\ 2,\ 3\}$.

10. $\mathbf{a} = \{3,\ 7,\ 2\}$, $\mathbf{b} = \{-2,\ 0,\ -1\}$, $\mathbf{c} = \{2,\ 2,\ 1\}$.

11. $\mathbf{a}=\{1,\quad -2,\quad 6\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad 0,\quad 1\}$, $\mathbf{c}=\{2,\quad -6,\quad 17\}$.

12. $\mathbf{a}=\{6,\quad 3,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{-1,\quad -2,\quad -1\}$, $\mathbf{c}=\{2,\quad 1,\quad 2\}$.

13. $\mathbf{a}=\{7,\quad 3,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{-1,\quad -2,\quad -1\}$, $\mathbf{c}=\{4,\quad 2,\quad 4\}$.

14. $\mathbf{a}=\{2,\quad 3,\quad 2\}$, $\mathbf{b}=\{4,\quad 7,\quad 5\}$, $\mathbf{c}=\{2,\quad 0,\quad -1\}$.

15. $\mathbf{a}=\{5,\quad 3,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{-1,\quad 0,\quad -1\}$, $\mathbf{c}=\{4,\quad 2,\quad 4\}$.

16. $\mathbf{a}=\{3,\quad 10,\quad 5\}$, $\mathbf{b}=\{-2,\quad -2,\quad -3\}$, $\mathbf{c}=\{2,\quad 4,\quad 3\}$.

17. $\mathbf{a}=\{-2,\quad -4,\quad -3\}$, $\mathbf{b}=\{4,\quad 3,\quad 1\}$, $\mathbf{c}=\{6,\quad 7,\quad 4\}$.

18. $\mathbf{a}=\{3,\quad 1,\quad -1\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad 0,\quad -1\}$, $\mathbf{c}=\{8,\quad 3,\quad -2\}$.

19. $\mathbf{a}=\{4,\quad 2,\quad 2\}$, $\mathbf{b}=\{-3,\quad -3,\quad -3\}$, $\mathbf{c}=\{2,\quad 1,\quad 2\}$.

20. $\mathbf{a}=\{4,\quad 1,\quad 2\}$, $\mathbf{b}=\{9,\quad 2,\quad 5\}$, $\mathbf{c}=\{1,\quad 1,\quad -1\}$.

21. $\mathbf{a}=\{5,\quad 3,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{4,\quad 3,\quad 3\}$, $\mathbf{c}=\{9,\quad 5,\quad 8\}$.

22. $\mathbf{a}=\{3,\quad 4,\quad 2\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad 1,\quad 0\}$, $\mathbf{c}=\{8,\quad 11,\quad 6\}$.

23. $\mathbf{a}=\{4,\quad -1,\quad -6\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad -3,\quad -7\}$, $\mathbf{c}=\{2,\quad -1,\quad -4\}$.

24. $\mathbf{a}=\{3,\quad 1,\quad 0\}$, $\mathbf{b}=\{-5,\quad -4,\quad -5\}$, $\mathbf{c}=\{4,\quad 2,\quad 4\}$.

25. $\mathbf{a}=\{3,\quad 0,\quad 3\}$, $\mathbf{b}=\{8,\quad 1,\quad 6\}$, $\mathbf{c}=\{1,\quad 1,\quad -1\}$.

26. $\mathbf{a}=\{1,\quad -1,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{1,\quad 0,\quad 3\}$, $\mathbf{c}=\{1,\quad -3,\quad 8\}$.

27. $\mathbf{a}=\{6,\quad 3,\quad 4\}$, $\mathbf{b}=\{-1,\quad -2,\quad -1\}$, $\mathbf{c}=\{2,\quad 1,\quad 2\}$.

28. $\mathbf{a}=\{4,\quad 1,\quad 1\}$, $\mathbf{b}=\{-9,\quad -4,\quad -9\}$, $\mathbf{c}=\{6,\quad 2,\quad 6\}$.

29. $\mathbf{a}=\{-3,\quad 3,\quad 3\}$, $\mathbf{b}=\{-4,\quad 7,\quad 6\}$, $\mathbf{c}=\{3,\quad 0,\quad -1\}$.

30. $\mathbf{a}=\{-7,\quad 10,\quad -5\}$, $\mathbf{b}=\{0,\quad -2,\quad -1\}$, $\mathbf{c}=\{-2,\quad 4,\quad -1\}$.

31. $\mathbf{a}=\{7,\quad 4,\quad 6\}$, $\mathbf{b}=\{2,\quad 1,\quad 1\}$, $\mathbf{c}=\{19,\quad 11,\quad 17\}$.

3.20. Висота тетраедра (піраміди)

У деяких задачах на застосування мішаного добутку векторів потрібно знайти висоту піраміди (тетраедра) при відомих координатах її вершин. Така задача зустрічається й в аналітичній геометрії, при обчисленні відстані від точки до площини, що проходить через три точки.

Нехай дана піраміда з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4. Потрібно знайти висоту опущену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

З вершини A_1 проведемо 3 вектори й знайдемо їхні координати:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\left(x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1\right),$$

$$\overrightarrow{A_1A_3}=\left(x_3-x_1;\, y_3-y_1;\, z_3-z_1\right),\ \overrightarrow{A_1A_4}=\left(x_4-x_1;\, y_4-y_1;\, z_4-z_1\right)$$

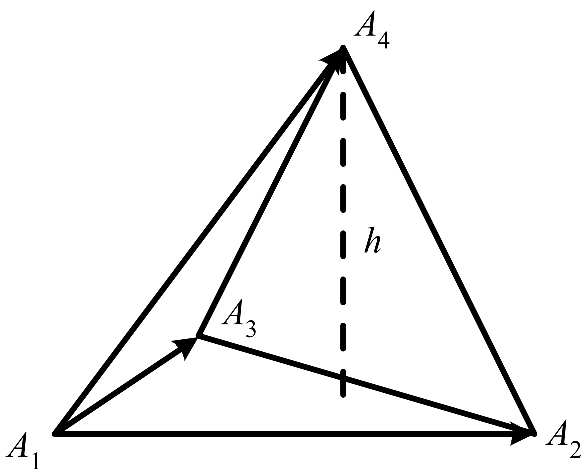


Рис. 3.30. Піраміда з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4

З курсу елементарної геометрії відома формула для об`єму тетраедра: $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{3} S_{A_1A_2A_3} \cdot h$. Звідки $h = \frac{3V_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2A_3}}$.

З іншого боку, об'єм тетраедра знайдемо відповідно до геометричного змісту мішаного добутку:

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|.$$

Мішаний добуток векторів $\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)$ дорівнює визначникові третього порядку, рядки якого складаються з координат першого, другого і третього векторів.

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Площу основи тетраедра (трикутника) знайдемо використовуючи векторний добуток векторів $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right)$.

Координати векторного добутку $\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right)$ знайдемо як:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Остаточно, висота тетраедра:

$$h = \frac{3V_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2A_3}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|}{\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right)} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|}{\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right)}.$$

Приклад

Обчислити об'єм тетраедра з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 і його висоту, опущену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$, де

$A_1(1;5;-7)$, $A_2(-3;6;3)$, $A_3(-2;7;3)$, $A_4(-4;8;-12)$.

◄ Знаходимо координати векторів:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (-3-1;\, 6-5;\, 3+7) = (-4;\, 1;\, 10),$$
$$\overrightarrow{A_1A_3} = (-2-1;\, 7-5;\, 3+7) = (-3;\, 2;\, 10),$$
$$\overrightarrow{A_1A_4} = (-4-1;\, 8-5;\, -12+7) = (-5;\, 3;\, -5).$$

Знаходимо мішаний добуток векторів $\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right) =$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \\ -5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & 7 & 0 \\ -3 & 2 & 10 \\ -5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 105.$$

Об'єм тетраедра:

$$V_{\mathrm{A_1A_2A_3A_4}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right| = \frac{1}{6}\cdot 105 = 17{,}5.$$

Знаходимо векторний добуток векторів $\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 10 \\ -3 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}$$

Обчислюємо довжину вектора (модуль) через його координати:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-10)^2 + 10^2 + (-5)^2} = \sqrt{225} = 15.$$

Висота тетраедра:

$$h = \frac{3V_{\mathrm{A_1A_2A_3A_4}}}{S_{\mathrm{A_1A_2A_3}}} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4}\right)\right|}{\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right)} = \frac{105}{15} = 7.$$ ►

3.21. Індивідуальне завдання № 3.6

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Обчислити об'єм тетраедра з вершинами у точках A_1, A_2, A_3, A_4 і його висоту, опущену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(1,\ 3,\ 6)$, $A_2(2,\ 2,\ 1)$, $A_3(-1,\ 0,\ 1)$, $A_4(-4,\ 6,\ -3)$.

2. $A_1(-4,\ 2,\ 6)$, $A_2(2,\ -3,\ 0)$, $A_3(-10,\ 5,\ 8)$, $A_4(-5,\ 2,\ -4)$.

3. $A_1(7,\ 2,\ 4)$, $A_2(7,\ -1,\ -2)$, $A_3(3,\ 3,\ 1)$, $A_4(-4,\ 2,\ 1)$.

4. $A_1(2,\ 1,\ 4)$, $A_2(-1,\ 5,\ -2)$, $A_3(-7,\ -3,\ 2)$, $A_4(-6,\ -3,\ 6)$.

5. $A_1(-1,\ -5,\ 2)$, $A_2(-6,\ 0,\ -3)$, $A_3(3,\ 6,\ -3)$, $A_4(-10,\ 6,\ 7)$.

6. $A_1(0,\ -1,\ -1)$, $A_2(-2,\ 3,\ 5)$, $A_3(1,\ -5,\ -9)$, $A_4(-1,\ -6,\ 3)$.

7. $A_1(5,\ 2,\ 0)$, $A_2(2,\ 5,\ 0)$, $A_3(1,\ 2,\ 4)$, $A_4(-1,\ 1,\ 1)$.

8. $A_1(2,\ -1,\ -2)$, $A_2(1,\ 2,\ 1)$, $A_3(5,\ 0,\ -6)$, $A_4(-10,\ 9,\ -7)$.

9. $A_1(-2,\ 0,\ -4)$, $A_2(-1,\ 7,\ 1)$, $A_3(4,\ -8,\ -4)$, $A_4(1,\ -4,\ 6)$.

10. $A_1(14,\ 4,\ 5)$, $A_2(-5,\ -3,\ 2)$, $A_3(-2,\ -6,\ -3)$, $A_4(-2,\ 2,\ -1)$.

11. $A_1(1,\ 2,\ 0)$, $A_2(3,\ 0,\ -3)$, $A_3(5,\ 2,\ 6)$, $A_4(8,\ 4,\ -9)$.

12. $A_1(2,\ -1,\ 2)$, $A_2(1,\ 2,\ -1)$, $A_3(3,\ 2,\ 1)$, $A_4(-4,\ 2,\ 5)$.

13. $A_1(1,\ 1,\ 2)$, $A_2(-1,\ 1,\ 3)$, $A_3(2,\ -2,\ 4)$, $A_4(-1,\ 0,\ -2)$.

14. $A_1(2,\ 3,\ 1)$, $A_2(4,\ 1,\ -2)$, $A_3(6,\ 3,\ 7)$, $A_4(7,\ 5,\ -3)$.

15. $A_1(1,\ 1,\ -1)$, $A_2(2,\ 3,\ 1)$, $A_3(3,\ 2,\ 1)$, $A_4(5,\ 9,\ -8)$.

16. $A_1(1,\ 5,\ -7)$, $A_2(-3,\ 6,\ 3)$, $A_3(-2,\ 7,\ 3)$, $A_4(-4,\ 8,\ -12)$.

17. $A_1(-3,\ 4,\ -7)$, $A_2(1,\ 5,\ -4)$, $A_3(-5,\ -2,\ 0)$, $A_4(2,\ 5,\ 4)$.

18. $A_1(-1,\ 2,\ -3)$, $A_2(4,\ -1,\ 0)$, $A_3(2,\ 1,\ -2)$, $A_4(3,\ 4,\ 5)$.

19. $A_1(4,\ -1,\ 3)$, $A_2(-2,\ 1,\ 0)$, $A_3(0,\ -5,\ 1)$, $A_4(3,\ 2,\ -6)$.

20. $A_1(1,\ -1,\ 1)$, $A_2(-2,\ 0,\ 3)$, $A_3(2,\ 1,\ -1)$, $A_4(2,\ -2,\ -4)$.

21. $A_1(1,\ 2,\ 0)$, $A_2(1,\ -1,\ 2)$, $A_3(0,\ 1,\ -1)$, $A_4(-3,\ 0,\ 1)$.

22. $A_1(1,\ 0,\ 2)$, $A_2(1,\ 2,\ -1)$, $A_3(2,\ -2,\ 1)$, $A_4(2,\ 1,\ 0)$.

23. $A_1(1,\ 2,\ -3)$, $A_2(1,\ 0,\ 1)$, $A_3(-2,\ -1,\ 6)$, $A_4(0,\ -5,\ -4)$.

24. $A_1(3,\ 10,\ -1)$, $A_2(-2,\ 3,\ -5)$, $A_3(-6,\ 0,\ -3)$, $A_4(1,\ -1,\ 2)$.

25. $A_1(-1,\ 2,\ 4)$, $A_2(-1,\ -2,\ -4)$, $A_3(3,\ 0,\ -1)$, $A_4(7,\ -3,\ 1)$.

26. $A_1(0,\ -3,\ 1)$, $A_2(-4,\ 1,\ 2)$, $A_3(2,\ -1,\ 5)$, $A_4(3,\ 1,\ -4)$.

27. $A_1(1,\ 3,\ 0)$, $A_2(4,\ -1,\ 2)$, $A_3(3,\ 0,\ 1)$, $A_4(-4,\ 3,\ 5)$.

28. $A_1(-2,\ -1,\ -1)$, $A_2(0,\ 3,\ 2)$, $A_3(3,\ 1,\ -4)$, $A_4(-4,\ 7,\ 3)$.

29. $A_1(-3,\ -5,\ 6)$, $A_2(2,\ 1,\ -4)$, $A_3(0,\ -3,\ -1)$, $A_4(-5,\ 2,\ -8)$.

30. $A_1(2,\ -4,\ -3)$, $A_2(5,\ -6,\ 0)$, $A_3(-1,\ 3,\ -3)$, $A_4(-10,\ -8,\ 7)$.

31. $A_1(1,\ -1,\ 2)$, $A_2(2,\ 1,\ 2)$, $A_3(1,\ 1,\ 4)$, $A_4(6,\ -3,\ 8)$.

3.22. Поняття власних чисел і власних векторів матриці

Нехай задана матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ і матриця-стовпець $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, висота якої збігається з порядком квадратної матриці A.

У багатьох задачах доводиться розглядати рівняння відносно X:

$$AX = \lambda X,$$

де λ – деяке число. Зрозуміло, що за будь-якого λ це рівняння має нульовий розв’язок:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Число λ, при якому це рівняння має ненульові розв’язки, називається *власним значенням* матриці A, а матриця-стовпець X при такому λ називається *власним вектором* матриці A.

З визначення випливає, що власний вектор під дією лінійного оператора A переходить у вектор, колінеарний самому собі, тобто просто збільшується у деяке число разів. У той же час невласні вектори перетворюються більш складним чином. У зв'язку із цим, поняття власного вектора є дуже корисним і зручним при вивченні багатьох питань матричної алгебри і її застосувань.

3.23. Методи знаходження власних чисел і власних векторів матриці

Знайдемо власний вектор матриці A. Оскільки $E \cdot X = X$, то матричне рівняння можна переписати у вигляді $AX = \lambda EX$ або $(A - \lambda E)X = 0$.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}.$$

У розгорнутому вигляді це рівняння можна переписати у вигляді системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Отже, одержали систему однорідних лінійних рівнянь для визначення координат x_1, x_2, x_3 вектора X. Щоб система мала ненульові розв’язки необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } |A - \lambda E| = 0.$$

Це рівняння третього ступеня відносно λ. Воно називається *характеристичним рівнянням* матриці A і служить для визначення власних значень λ.

Кожному власному значенню λ відповідає власний вектор X, координати якого визначаються із системи при відповідному значенні λ.

Якщо всі власні значення різні, то безліч власних векторів можна вибрати за базис векторного простору. У цьому базисі лінійне перетворення описується діагональною матрицею:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix} \equiv \widehat{A}.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти власні вектори й відповідні їм власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти представлення матриці A у базисі, утвореному її власними векторами.

◄ Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Розкриваючи визначник, одержуємо квадратне рівняння, з якого знайдемо власні значення:

$$\left[(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0\right] \Rightarrow \left[\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0\right] \qquad \lambda_1 = -1; \lambda_2 = 5.$$

Перший розв'язок $\lambda_1 = -1$.

Підставляємо у характеристичне рівняння значення $\lambda_1 = -1$ та одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Останнє рівняння системи обернулося на нуль, і система стала недовизначеною – два рівняння на три невідомих. Ранги основної матриці системи і розширеної матриці збігаються (рівні 1), але менше розмірності системи (кількості невідомих рівних 2), тобто:

$$\text{rang } A = \text{rang } A^* < n.$$

Запишемо розв'язок системи у такий спосіб:

$$\begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = -2x_1 = -2C \end{cases} \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} C \\ -2C \end{pmatrix}, \text{ де } C \in R.$$

Тобто, при C=1 довільний частинний розв'язок $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Другий розв'язок $\lambda_2 = 5$.

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = 4x_1 = 4C \end{cases} \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} C \\ 4C \end{pmatrix}, \text{ де } C \in R.$$

Тобто, при C=1 довільний частинний розв'язок $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку за допомогою пакета *Maxima*. Для обчислення власних значень і власних векторів необхідно за допомогою оператора `matrix` ввести матрицю, що задана в умові завдання.

Щоб знайти **власні значення** матриці використовують функцію `eigenvalues`. Ця функція виводе список, що складається із двох підсписків. Перший підсписок – це власні значення матриці А, а другий підсписок – це ступінь складності власних значень у відповідному порядку.

Функція `eigenvalues` викликає функцію `solve`, щоб знайти розв'язки характеристичного рівняння матриці. Іноді функція `solve` не здатна знайти розв'язки багаточлена через те, що вони є комплексними числами.

Щоб знайти **власні вектори** матриці необхідно використовувати функцію `eigenvectors`. Ця функція створює список, у якому перші два підсписки – це власні значення матриці та ступінь складності власних значень, а інші підсписки – це власні вектори матриці, що відповідають цим власним значенням.

```
(%i1) A:matrix([1,1],[8,3])$

(%i2) eigenvalues(%);
(%o2) [[5,-1],[1,1]]

(%i3) eigenvectors(A);
(%o3) [[[5,-1],[1,1]],[1,4],[1,-2]]
```

Рис. 3.31. Пошук власних значень і власних векторів матриці

Таким чином, за допомогою пакета *Maxima* одержимо власні значення матриці А: $\lambda_1 = 5; \lambda_2 = -1$, і власні вектори: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Тепер представимо матрицю *A у* базисі, утвореному її власними векторами: $\widehat{A} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{Vmatrix}$.►

Приклад 2. Знайти власні вектори й відповідні їм власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

◀ Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваємо визначник розкладанням за першим рядком:

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-1\right)-2\lambda+1 =$$

$$= \lambda^2-\lambda-1-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-2\lambda+1 = \lambda\left(-\lambda^2+2\lambda-2\right)=0.$$

Оскільки вираз у дужках не має раціональних розв'язків (дискримінант $D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 2=-4<0$) маємо єдиний розв'язок $\lambda=0$.

Підставляючи власне значення у характеристичне рівняння, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2=C \\ x_3=3x_2=3C \\ C\in R \end{cases} \Rightarrow \; X=\begin{pmatrix} C \\ C \\ 3C \end{pmatrix}.$$

Тобто, при C=1 довільний частинний розв'язок $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. ▶

3.24. Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)

Як приклад математичної моделі економічного процесу, що зводиться до поняття власного вектора і власного значення матриці, розглянемо **лінійну модель обміну** (модель міжнародної торгівлі).

Нехай маємо n країн S_1, S_2,…, S_n національний прибуток кожної з яких дорівнює відповідно x_1, x_2, …, x_n. Позначимо коефіцієнтами a_{ij} частину національного прибутку, що країна S_j витрачає на покупку товарів у країни S_i. Будемо вважати, що увесь національний прибуток витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1 \; (j=1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Розглянемо матрицю $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

що одержала назву *структурної матриці торгівлі*. Відповідно до формули $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1$, сума елементів будь-якого стовпця матриці A дорівнює 1.

Для будь-якої країни S_i (i=1, 2,…, n) виторг від внутрішньої й зовнішньої торгівлі складе:

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n .$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної країни S_i, тобто виторг від торгівлі кожної країни повинний бути не менше її національного прибутку:

$$p_i \ge x_i \ (i=1, 2,\ldots, n).$$

Якщо вважати, що $p_i \ge x_i$ (i=1, 2,…, n), то одержуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \ge x_n. \end{cases}$$

Склавши і згрупувавши всі нерівності останньої системи, одержимо:

$$x_1\left(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}\right) + x_2\left(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + x_n\left(a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}\right) \ge x_1 + x_2 + \ldots + x_n .$$

З огляду на $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, вирази в дужках рівні одиниці, і ми приходимо до суперечливої нерівності: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ge x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Таким чином, нерівність $p_i \ge x_i$ (i=1, 2,…, n) неможлива, і умова $p_i \ge x_i$ приймає вид $p_i = x_i$ (i=1, 2,…, n). З економічної точки зору це зрозуміло, тому що всі країни не можуть одночасно діставати прибуток.

Уводячи вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ національних прибутків країн, одержимо рівняння: $AX = X$, або $AX = \lambda X$, тобто задача звелася до знаходження власного вектора матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

<u>Приклад</u>

Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти національні прибутки країн для збалансованої торгівлі.

◄ Знаходимо власний вектор x, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Для цього розв'язуємо рівняння $(A - \lambda E)x = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1/3-1 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2-1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0-1 \end{pmatrix} = 0, \text{ або } \begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Розв'язуючи останню систему методом Гаусса знаходимо: $x_1 = (3/2)C$, $x_2 = 2C$, $x_3 = C$.

Отриманий результат означає, що збалансованість торгівлі трьох країн досягається при векторі національних прибутків $x = (3/2C; 2C; C)$, тобто при співвідношенні національних прибутків країн 3 : 4 : 2. ►

3.25. Індивідуальне завдання № 3.7

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Знайти власні числа й власні вектори матриці *A*. Знайти представлення матриці *A* у базисі, створеному її власними векторами.

1. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -14{,}4 & -11 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -28 & -10 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -40 & -13 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2{,}4 & -6 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5{,}6 & -8 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3{,}6 & -7 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -3{,}6 & 2 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -17{,}5 & -11 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -13{,}5 & -10 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0{,}5 & -2 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -0{,}5 & -2 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} -11 & -14{,}4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -10 & -28 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} -13 & -40 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -14{,}4 & -11 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -28 & -10 \end{bmatrix}$

3.26. Поняття квадратичної матриці й квадратичної форми

При розв'язанні різних задач застосування часто доводиться досліджувати квадратичні форми.

Визначення. Квадратичною формою $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n змінних називається сума, кожен член якої є або квадратом однієї зі змінних, або добутком двох різних змінних, узятих з деяким коефіцієнтом:

$$L\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j .$$

Припускаємо, що коефіцієнти квадратичної форми – дійсні числа, причому $a_{ij}=a_{ji}$. Нагадаємо, що така матриця називається симетричною. Матриця $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1,2,\dots, n)$, складена із цих коефіцієнтів, називається *матрицею квадратичної форми*. Її діагональні елементи дорівнюють коефіцієнтам при квадратах змінних, а інші елементи – половинам відповідних коефіцієнтів квадратичної форми.

У матричному записі квадратична форма має вигляд:

$$L = X^T AX ,$$

де $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець змінних, а $X^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – матриця-рядок змінних.

Дійсно, якщо помножити матрицю-рядок X^{T} розмірністю 1 х n на матрицю квадратичної форми A розмірністю n х n одержимо матрицю-рядок розмірністю 1 х n, що при множенні на матрицю-стовпець X розмірністю n х 1 дає квадратичну форму розмірністю 1 х 1:

$$L=\underset{1\text{x}n}{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}}\underset{n\text{x}n}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}\underset{n\text{x}1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{j1}x_i & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{j2}x_i & \dots & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{jn}x_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{j1}x_i x_1+\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{j2}x_i x_2+\ \dots+\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{jn}x_i x_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j .$$

Приклад

Дана квадратична форма $L(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2-12x_1x_2-10x_1x_3+x_2^2-3x_3^2$. Записати її в матричному вигляді.

◄ Знайдемо матрицю квадратичної форми. Оскільки діагональні елементи цієї матриці дорівнюють коефіцієнтам при квадратах змінних, тобто 4, 1, –3, а інші елементи – половинам відповідних коефіцієнтів квадратичної форми, то:

$$L=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}4&-6&-5\\-6&1&0\\-5&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.►$$

З'ясуємо, як змінюється квадратична форма при невиродженому лінійному перетворенні змінних.

Нехай матриці-стовпці змінних $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}$ і $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\dots\\y_n\end{pmatrix}$ зв'язані лінійним співвідношенням $X = CУ$, де $C = (c_{ij})$ $(i, j = 1,2,\dots, n)$ – є деяка невироджена матриця n-го порядку. Тоді квадратична форма $L=X^TAX$ прийме вигляд:
$L=(CY)^TA(CY)=(Y^TC^T)A(CY)=Y^T(C^TAC)Y$, або $L=Y^TA^*Y$, де $A^*=C^TAC$.

Транспонування добутку матриць проводимо за формулою $(CY)^{\mathrm{T}}=(Y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}})$(див. властивість добутку транспонованих матриць розділу «Лінійна алгебра»).

Отже, при невиродженому лінійному перетворенні $X=CY$ матриця квадратичної форми приймає вигляд: $A^*=C^{\mathrm{T}}AC$.

Приклад

Дано квадратичну форму $L(x_1,x_2)=2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$. Знайти квадратичну форму $L(y_1,y_2)$ отриману з даної лінійним перетворенням $x_1=2y_1-3y_2;\quad x_2=y_1+y_2$.

◄ Матриці-стовпці змінних $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ і $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ пов'язані лінійним співвідношенням $X=CY$, де $C=\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\end{pmatrix}$матриця 2-го порядку.

Матриця даної квадратичної форми $A=\begin{pmatrix}2&2\\2&-3\end{pmatrix}$. Матриця шуканої квадратичної форми $L(y_1, y_2) = Y^T A^* Y$.

Знайдемо матрицю квадратичної форми:

$$A^* = C^T A C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки діагональні елементи нової квадратичної форми дорівнюють коефіцієнтам при квадратах змінних, а інші елементи – половинам відповідних коефіцієнтів квадратичної форми, маємо:

$$L(y_1, y_2) = 13y_1^2 - 34y_1y_2 + 3y_2^2. \blacktriangleright$$

3.27. Канонічний вигляд квадратичної форми

Слід зазначити, що при деяких вдало обраних лінійних перетвореннях вигляд можна істотно спростити.

Квадратична форма $L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ називається *канонічною* (або має *канонічний вигляд*), якщо всі її коефіцієнти $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, тобто матриця квадратичної форми є діагональною:

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 .$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема. Будь-яка квадратична форма за допомогою невиродженого лінійного перетворення змінних може бути зведена до канонічного вигляду.

3.28. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду

Звести квадратичну форму до канонічного вигляду означає перетворити первинну форму так, щоб коефіцієнти при добутках двох різних змінних дорівнювали нулю. Або інакше, квадратична форма називається канонічною, якщо всі елементи матриці квадратичної форми, крім основної діагоналі, дорівнюють нулю.

Канонічний вигляд квадратичної форми не є однозначно визначеним, тому що та сама квадратична форма може бути зведена до канонічного вигляду декількома способами. Будемо розглядати два способи зведення до канонічного вигляду: метод Лагранжа й ортогональне перетворення.

Метод Лагранжа заснований на послідовному перетворенні у квадрати суми (різниці) змінних первинної квадратичної форми $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Потім виконується заміна змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ за допомогою невироджених лінійних перетворень $y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Таким чином, первинна квадратична форма $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ зводиться до канонічного вигляду $L_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Приклад

Квадратичну форму звести до канонічного вигляду методом Лагранжа $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2$.

◀ Винесемо за дужки загальний множник і виділимо повний квадрат різниці змінних (x_1, x_2):

$$L(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2 = 2\left[x_1^2 - 2x_1\left(\frac{3}{2}x_2\right) + \left(\frac{3}{2}x_2\right)^2 + 5x_2^2 - \left(\frac{3}{2}x_2\right)^2\right] =$$

$$= 2\left[\left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \left(5 - \frac{9}{4}\right)x_2^2\right] = 2 \cdot \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{11}{2}x_2^2.$$

Одержуємо невироджене лінійне перетворення $y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2$; $y_2 = x_2$.

При зазначеному невиродженому лінійному перетворенні первинна квадратична форма прийме такий канонічний вигляд:

$$L_1(y_1, y_2) = 2 \cdot y_1^2 + \frac{11}{2} \cdot y_2^2.$$

Перевірка: $2 \cdot y_1^2 + \frac{11}{2} \cdot y_2^2 = 2 \cdot \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{11}{2}{x_2}^2 =$

$$= 2\left(x_1^2 - 3x_1x_2 + \frac{9}{4}x_2^2\right) + \frac{11}{2}x_2^2 = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + \frac{20}{2}x_2^2 = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2. \blacktriangleright$$

Ортогональне перетворення – це лінійне перетворення векторного простору, що зберігає незмінними одиничну довжину базисних векторів. Ортогональне перетворення здійснюється за допомогою власних значень і власних векторів первинної квадратичної форми $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$L = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – власні числа первинної квадратичної форми, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – власні вектори первинної квадратичної форми.

У матричному вигляді $L = Y^T \widehat{A} Y$,

де $\widehat{A}$ – матриця первинної квадратичної форми у базисі, утвореному її власними векторами, Y – матриця–стовпець змінних, що складаються з власних векторів первинної квадратичної форми.

Таким чином, первинна квадратична форма набуде канонічного виду: $L(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 +, \ldots, \lambda_n y_n^2$. При цьому довжина базисних векторів повинна дорівнювати одиниці: $|y_1| = |y_2| =, \ldots, = |y_n| = 1$.

Приклад

Квадратичну форму звести до канонічного вигляду ортогональним перетворенням $L(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2$.

◄ Знайдемо матрицю первинної квадратичної форми. Її діагональні елементи дорівнюють коефіцієнтам при квадратах змінних, тобто 2, 10, а інші елементи – половинам відповідних коефіцієнтів квадратичної форми, тобто $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$.

Складаємо характеристичне рівняння для матриці A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -3 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Розкриваємо визначник $(2-\lambda)(10-\lambda) - (-3)(-3) = 0$,

$$20 - 2\lambda - 10\lambda + \lambda^2 - 9 = 0.$$

Розв’язуємо квадратне рівняння й знаходимо власні числа:

$\left[\lambda^2 - 12\lambda + 11 = 0\right] \Rightarrow [\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 11]$

Знаходимо власні вектори:

$$\lambda_1 = 1{:}\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 \\ x_2 = \dfrac{x_1}{3} = \dfrac{C_1}{3} \end{cases} \Rightarrow y_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Для визначення сталої C_1 запишемо вираз для довжини вектора y_1 через його координати і прирівняємо його до одиниці, як це потрібно у постановці задачі ортогонального перетворення:

$$|y_1| = C_1 \cdot \sqrt{1^2 + \left(1/3\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{9}} C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \sqrt{\frac{9}{10}}. \quad y_1 = \sqrt{\frac{9}{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 11{:} \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_2 \\ x_2 = -3x_1 = -3C_2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно знаходимо C_2 і y_2:

$$|y_2| = C_2 \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \sqrt{\frac{1}{10}}. \quad y_2 = \sqrt{\frac{1}{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Одержуємо невироджене лінійне перетворення: $y_1 = \dfrac{\sqrt{10}}{10}(3x_1 + x_2)$,

$$y_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}\left(x_1 - 3x_2\right).$$

При зазначеному невиродженому лінійному перетворенні первинна квадратична форма набуде канонічного вигляду:

$$L_1\left(y_1, y_2\right) = y_1^2 + 11 \cdot y_2^2.$$

Перевірка: $y_1^2 + 11 \cdot y_2^2 = 1 \cdot \left[\frac{\sqrt{10}}{10}\left(3x_1 + x_2\right)\right]^2 + 11\left[\frac{\sqrt{10}}{10}\left(x_1 - 3x_2\right)\right]^2 =$

$= \frac{1}{10}\left(9x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2\right) + \frac{11}{10}\left(x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2\right) = \frac{20}{10}x_1^2 + \frac{6-66}{10}x_1x_2 + \frac{100}{10}x_2^2 =$

$= 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 10x_2^2$ ►

3.29. Індивідуальне завдання № 3.8

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Звести квадратичну форму $L\left(x_1, x_2\right)$ до канонічного вигляду методом Лагранжа й ортогональним перетворенням.

1. $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

2. $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$

3. $-2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$

4. $-3x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$

5. $4x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$

6. $6x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$

7. $4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$

8. $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$

9. $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$

10. $8x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$

11. $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

12. $-4x_1^2 + 6x_1x_2 - 8x_2^2$

13. $6x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$

14. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$

15. $2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_2^2$

16. $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$

17. $3x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2^2$

18. $-3x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$

19. $5x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2$

20. $-4x_1^2 + 6x_1x_2 - 6x_2^2$

21. $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$

22. $2x_1^2 - 8x_1x_2 + 10x_2^2$

23. $-4x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$

24. $6x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_2^2$

25. $-4x_1^2 + 6x_1x_2 - 5x_2^2$

26. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2$

27. $4x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$

28. $8x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$

29. $6x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2$

30. $-3x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$

31. $6x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$

3.30. Визначеність квадратичних форм

Отримані різними способами канонічні форми мають загальну властивість, що має вигляд наступної теореми.

Теорема (закон інерції квадратичних форм). Число доданків із позитивними (негативними) коефіцієнтами первинної квадратичної форми дорівнює числу цих доданків у зведеній квадратичній формі канонічного вигляду й не залежить від способу зведення форми до цього вигляду.

Так, у прикладах розглянутих вище, та сама квадратична форма різними способами була зведена до різного вигляду:

$$L_1(y_1, y_2) = 2y_1^2 + \frac{11}{2}y_2^2 \quad \text{і} \quad L_2(y_1, y_2) = y_1^2 + 11 \cdot y_2^2.$$

Як бачимо, в обох квадратичних формах присутні тільки позитивні коефіцієнти.

Слід зазначити, що ранг матриці квадратичної форми, званий рангом квадратичної форми, дорівнює числу відмінних від нуля коефіцієнтів канонічної форми й не змінюється при лінійних перетвореннях.

Квадратична форма називається *додатньо* визначеною, якщо при всіх значеннях змінних, з яких хоча б одне відмінне від нуля $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$.

Квадратична форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *від'ємно* визначеною, якщо при всіх значеннях змінних, з яких хоча б одне відмінне від нуля $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$.

Так, наприклад, квадратична форма $L_1 = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2$ є додатньо визначеною, оскільки, за будь-яких ненульових значень змінних, значення виразу буде позитивним. А форма $L_2 = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ – є від'ємно визначеною, тому що при її алгебраїчному перетворенні $L_2 = -\left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) = -\left(x_1 - x_2\right)^2$ за будь-яких ненульових значень змінних значення виразу буде негативним.

Правило знаків діагональних елементів. Для того щоб квадратична форма канонічного вигляду $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$була *додатньо* (*від'ємно*) визначеною, необхідно і достатньо, щоб усі власні значення λ_i, матриці A були позитивні (негативні).

У ряді випадків, наприклад, коли матриця первинної квадратичної форми має порядок більше двох, для встановлення знаковизначеності квадратичної форми зручніше буває застосувати критерій Сильвестра.

Критерій Сильвестра. Для того щоб квадратична форма була додатньо визначеною, необхідно, але недостатньо, щоб усі головні мінори матриці цієї форми були позитивні, тобто $M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_n > 0$, де:

$$M_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Головний мінор n-го порядку дорівнює визначникові всієї матриці.

Слід зазначити, що для від'ємно визначених квадратичних форм знаки головних мінорів чергуються, починаючи зі знака «мінус» для мінору першого порядку.

Крім додатньо й від'ємно визначених квадратичних форм існують *невід'ємні* й *недодатні*, а також *знаконевизначені* квадратичні форми. Для більшої наочності, усі можливі випадки визначеності квадратичних форм зведемо у таблицю 3.2.

Таблиця 3.2

Види визначеності квадратичних форм

№ п/п	Вид визначеності	Значення власних чисел у канонічному вигляді квадратичної форми	Значення головних діагональних мінорів первинної квадратичної форми ($i = 1,2,\dots, n$)
1.	Додатньо визначена	$\lambda_i > 0$	$M_i > 0$
2.	Невід'ємно визначена	$\lambda_i \ge 0$	$M_i \ge 0$
3.	Від'ємно визначена	$\lambda_i < 0$	$\begin{cases} M_i < 0 \text{ при непарному } i \\ M_i > 0 \text{ при парному } i \end{cases}$
4.	Недодатньо визначена	$\lambda_i \le 0$	$\begin{cases} M_i \le 0 \text{ при непарному } i \\ M_i \ge 0 \text{ при парному } i \end{cases}$
5.	Знаконевизначена	при інших співвідношеннях	при інших співвідношеннях

Приклади

Приклад 1. Оцінити визначеність квадратичної форми:

$$L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$$

◄ *Перший спосіб* (*за правилом знаків діагональних елементів*)

Знайдемо матрицю квадратичної форми і її характеристичне рівняння:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \qquad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваємо визначник за третім рядком:

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0 \text{ або } (3-\lambda)\left[(2-\lambda)(4-\lambda)-1\right]=0.$$

Розкриваємо дужки:

$(3-\lambda)\left(6-6\lambda+\lambda^2-1\right)=0$ або $(3-\lambda)\left(\lambda^2-6\lambda+5\right)=0$.

Перші дужки дають перший розв'язок $\lambda_1=3$. Розв'язуємо квадратне рівняння у других дужках і знаходимо $\lambda_2=5; \quad \lambda_3=1$.

Так як розв'язки характеристичного рівняння матриці A позитивні, то на підставі наведеної теореми квадратична форма $L(x_1,x_2,x_3)$ – додатньо визначена.

Другий спосіб (*за критерієм Сильвестра*)

Знайдемо головний мінор першого порядку матриці A:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|2|=2>0.$$

Знайдемо головний мінор другого порядку матриці A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=8-1=7>0.$$

Знайдемо головний мінор третього порядку матриці A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 7=21>0.$$

Так як всі головні мінори матриці A позитивні, то за критерієм Сильвестра дана квадратична форма $L(x_1,x_2,x_3)$ додатньо визначена. ►

Приклад 2. Звести квадратичну форму $L(x_1,x_2,x_3)$ до канонічного вигляду методом Лагранжа й оцінити визначеність:

а) первинного вигляду – за критерієм Сильвестра;

б) канонічного вигляду – за знаками діагональних елементів отриманої матриці квадратичної форми:

$$L(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2-4x_2x_3-3x_3^2.$$

◄ а) оцінимо визначеність первинної квадратичної форми за критерієм Сильвестра. Для цього спочатку знайдемо матрицю первинної квадратичної форми:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо головний мінор першого порядку матриці A:

$$|2| = 2 > 0.$$

Знайдемо головний мінор другого порядку матриці A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0.$$

Знайдемо головний мінор третього порядку матриці A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 49 = -25 < 0.$$

Оскільки у чергуванні знаків головних мінорів немає визначеного порядку, то за критерієм Сильвестра первинна квадратична форма $L\left(x_1, x_2, x_3\right)$ знаконевизначена.

б) оцінимо визначеність квадратичної форми канонічного вигляду – за знаками діагональних елементів.

Виділимо повний квадрат першої змінної x_1:

$$L\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2\left[x_1^2 + 2x_1\left(x_2 + \frac{x_3}{2}\right) + \left(x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2\right] - 2\left(x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 3x_3^2 =$$

$$= 2\left(x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2 - 2\left(x_2^2 + x_2x_3 + \frac{x_3^2}{4}\right) + 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 3x_3^2.$$

Нехай $y_1 = x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2}$, тоді:

$$L\left(y_1, x_2, x_3\right) = 2y_1^2 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 - \frac{x_3^2}{2} + 3x_2^2 - 4x_2x_3 - 3x_3^2 =$$

$$= 2y_1^2 + x_2^2 - 6x_2x_3 - \frac{7}{2}x_3^2$$

Виділимо повний квадрат другої змінної x_2:

$$L\left(y_1, x_2, x_3\right) = 2y_1^2 + \left[x_2^2 - 2x_2\left(3x_3\right) + \left(3x_3\right)^2\right] - \left(3x_3\right)^2 - \frac{7}{2}x_3^2 =$$

$$= 2y_1^2 + \left(x_2 - 3x_3\right)^2 - 9x_3^2 - \frac{7}{2}x_3^2.$$

Нехай $y_2 = x_2 - 3x_3$, тоді одержимо:

$$L\left(y_1, y_2, x_3\right) = 2y_1^2 + y_2^2 - \frac{25}{2}x_3^2.$$

Якщо тепер позначити $y_3 = x_3$, то одержуємо невироджене лінійне перетворення $y_1 = x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2}$; $y_2 = x_2 - 3x_3$; $y_3 = x_3$.

При зазначеному невиродженому лінійному перетворенні первинна квадратична форма набуде канонічного вигляду:

$L(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + y_2^2 - \frac{25}{2}x_3^2$ або у вигляді діагональної матриці:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25/2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки у чергуванні знаків діагональних елементів немає визначеного порядку, то за знаками діагональних елементів канонічна квадратична форма $L(y_1, y_2, y_3)$ знаконевизначена. ►

3.31. Індивідуальне завдання № 3.9

Студент повинен розв'язати одну з наведених нижче задач, вибравши її за своїм номером у журналі групи.

Звести квадратичну форму $L(x_1, x_2, x_3)$ до канонічного вигляду методом Лагранжа й оцінити визначеність:

а) первинного вигляду – за критерієм Сильвестра;

б) канонічного вигляду – за знаками діагональних елементів отриманої матриці квадратичної форми.

1. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$

2. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$

3. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$

4. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$

5. $4x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 3x_3^2$

6. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$

7. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$

8. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$

9. $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$

10. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$

11. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$

12. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$

13. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$

14. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$

15. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$

16. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$

17. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$

18. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$

19. $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$

20. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$

21. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$

22. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2$

23. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$

24. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$

25. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$

26. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$

27. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$

28. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$

29. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$

30. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$

31. $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$

Контрольні запитання

1. Які вектори називають колінеарними і які компланарними?
2. Які властивості лінійних операцій над векторами?
3. Які існують властивості проекцій вектора на вісь?
4. Що таке базис на площині й у просторі?
5. Що таке характеристичне рівняння, власні числа й власні вектори матриці лінійного оператора?
6. Що називається канонічним видом квадратичної форми?
7. Які існують методи зведення квадратичної форми до канонічного вигляду?
8. У чому полягає закон інерції квадратичних форм?
9. Які властивості скалярного добутку? Написати формулу, що виражає скалярний добуток через декартові координати.
10. Які властивості векторного добутку? Написати умову колінеарності векторів мовою векторного добутку. Написати формулу, що виражає векторний добуток через декартові координати співмножників.
11. Дати визначення мішаного добутку. Написати умову компланарності векторів. Написати формулу, що виражає мішаний добуток через декартові координати.

У розділі розглянуті основи векторного аналізу, способи знаходження власних чисел і власних векторів матриці лінійного оператора, а також наведені методи оцінки визначеності квадратичних форм

ВИСНОВКИ

Даний навчальний посібник призначений для студентів економічних спеціальностей. Перший розділ присвячений елементарній математиці. Увага приділена тим розділам, що будуть використовутися під час вивчення основних розділів «Математики для економістів». У розділі «Лінійна алгебра» основна увага приділяється прийомам і навичкам розв’язування задач, пов'язаних із системами лінійних алгебраїчних рівнянь. У курсах, що викладаються для економічних спеціальностей часто зустрічаються системи, що не мають розв’язків, або мають безліч розв’язків. Даний посібник допоможе з успіхом упоратися зі всіма цими випадками.

Знання, отримані при розв’язуванні задач «Векторної алгебри» будуть корисні й при вивченні «Аналітичної геометрії». А теорія квадратичних форм буде корисною в економічних розрахунках. З її допомогою розраховуються різноманітні фінансові операції, нараховуються відсотки й т.п.

Під час вивчення матеріалу, викладеного в посібнику, студентам пропонується розв’язати 20 різних індивідуальних завдань, що дозволять закріпити вивчений матеріал.

Методика використання комп'ютерної програми *Maxima*, що використовується у всіх розділах, полегшує розв’язування задач за викладеними матеріалами. Цю програму «комп'ютерної математики» можна використовувати як «калькулятор із вищою математичною освітою», що дозволяє проводити чисельні розрахунки з великою, або навіть необмеженою (нічим, окрім пам'яті комп'ютера), точністю й базуючись на цілій енциклопедії закладених у нього знань із математики. *Maxima* орієнтована як на чисельні розрахунки, так і на символьне представлення даних і символьні (точні) розв`язки. Це дає можливість вибрати більш відповідний інструмент саме під свої конкретні завдання. Але основна потужність *Maxima* прихована саме в переплетенні цих двох особливостей: ви можете, наприклад, точно вивести в символьному вигляді коефіцієнти диференціального рівняння, а потім, у разі неможливості або відсутності необхідності його точного розв`язку, підрахувати деякий конкретний розв`язок чисельно в будь-яких заданих точках; або наблизити відрізком ряду Тейлора будь-якого порядку; або побудувати інтегральну лінію за тими ж чисельними значеннями, підрахованими з будь-якою потрібною точністю, на плоскості або в тривимірному просторі.

За допомогою *Maxima* можна заощадити масу часу й уникнути багатьох помилок при обчисленнях.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ТА ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Большая Советская Энциклопедия. (В 30 томах). Гл. ред. А.М.Прохоров. Изд. 3-е. – М.: Советская Энциклопедия, – 1975. – Т. 20.
2. Высшая математика для экономистов. Учебник для экономических специальностей вузов / Под ред. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 471 с.
3. Демидович Б.П.. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: «Наука», 1977.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001.– 648с.
5. Ильин В.А., Поздняк З.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984.
6. Колесников А. Н. Краткий курс математики для экономистов.– М.: Инфра-М, 1997.
7. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике / Типовые расчёты /. – М.: Высшая школа. – 1994. – 202 с.
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: «Наука», 1984.
9. Щипачев В.С. Высшая математика: Учеб. Для нематемат.спец. вузов/. Под ред. Акад. А.Н.Тихонова. – М.: Высш.шк.. 1990. – 479 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ДОДАТОК А

ВИТЯГ З ТАБЛИЦІ БРАДІСА

(градусна міра)

SIN 1=0.0175
SIN 2=0.0349
SIN 3=0.0523
SIN 4=0.0698
SIN 5=0.0872
SIN 6=0.1045
SIN 7=0.1219
SIN 8=0.1392
SIN 9=0.1564
SIN 10=0.1736
SIN 11=0.1908
SIN 12=0.2079
SIN 13=0.2250
SIN 14=0.2419
SIN 15=0.2588
SIN 16=0.2756
SIN 17=0.2924
SIN 18=0.3090
SIN 19=0.3256
SIN 20=0.3420
SIN 21=0.3584
SIN 22=0.3746
SIN 23=0.3907
SIN 24=0.4067
SIN 25=0.4226
SIN 26=0.4384
SIN 27=0.4540
SIN 28=0.4695
SIN 29=0.4848
SIN 30=0.5000
SIN 31=0.5150
SIN 32=0.5299
SIN 33=0.5446
SIN 34=0.5592
SIN 35=0.5736
SIN 36=0.5878
SIN 37=0.6018
SIN 38=0.6157
SIN 39=0.6293
SIN 40=0.6428
SIN 41=0.6561
SIN 42=0.6691
SIN 43=0.6820
SIN 44=0.6947
SIN 45=0.7071
SIN 46=0.7193
SIN 47=0.7314
SIN 48=0.7431
SIN 49=0.7547
SIN 50=0.7660
SIN 51=0.7771
SIN 52=0.7880
SIN 53=0.7986
SIN 54=0.8090
SIN 55=0.8192
SIN 56=0.8290
SIN 57=0.8387
SIN 58=0.8480
SIN 59=0.8572
SIN 60=0.8660
SIN 61=0.8746
SIN 62=0.8829
SIN 63=0.8910
SIN 64=0.8988
SIN 65=0.9063
SIN 66=0.9135
SIN 67=0.9205
SIN 68=0.9272
SIN 69=0.9336
SIN 70=0.9397
SIN 71=0.9455
SIN 72=0.9511
SIN 73=0.9563
SIN 74=0.9613
SIN 75=0.9659
SIN 76=0.9703
SIN 77=0.9744
SIN 78=0.9781
SIN 79=0.9816
SIN 80=0.9848
SIN 81=0.9877
SIN 82=0.9903
SIN 83=0.9925
SIN 84=0.9945
SIN 85=0.9962
SIN 86=0.9976
SIN 87=0.9986
SIN 88=0.9994
SIN 89=0.9998
SIN 90=1.0000

cos 0= 1.0000
cos 1= 0.9998
cos 2= 0.9994
cos 3= 0.9986
cos 4= 0.9976
cos 5= 0.9962
cos 6= 0.9945
cos 7= 0.9925
cos 8= 0.9903
cos 9= 0.9877
cos 10= 0.9848
cos 11= 0.9816
cos 12= 0.9781
cos 13= 0.9744
cos 14= 0.9703
cos 15= 0.9659
cos 16= 0.9613
cos 17= 0.9563
cos 18= 0.9511
cos 19= 0.9455
cos 20= 0.9397
cos 21= 0.9336
cos 22= 0.9272
cos 23= 0.9205
cos 24= 0.9135
cos 25= 0.9063
cos 26= 0.8988
cos 27= 0.8910
cos 28= 0.8829
cos 29= 0.8746
cos 30= 0.8660
cos 31= 0.8572
cos 32= 0.8480
cos 33= 0.8387
cos 34= 0.8290
cos 35= 0.8192
cos 36= 0.8090
cos 37= 0.7986
cos 38= 0.7880
cos 39= 0.7771
cos 40= 0.7660
cos 41= 0.7547
cos 42= 0.7431
cos 43= 0.7314
cos 44= 0.7193
cos 45= 0.7071
cos 46= 0.6947
cos 47= 0.6820
cos 48= 0.6691
cos 49= 0.6561
cos 50= 0.6428
cos 51= 0.6293
cos 52= 0.6157
cos 53= 0.6018
cos 54= 0.5878
cos 55= 0.5736
cos 56= 0.5592
cos 57= 0.5446
cos 58= 0.5299
cos 59= 0.5150
cos 60= 0.5000
cos 61= 0.4848
cos 62= 0.4695
cos 63= 0.4540
cos 64= 0.4384
cos 65= 0.4226
cos 66= 0.4067
cos 67= 0.3907
cos 68= 0.3746
cos 69= 0.3584
cos 70= 0.3420
cos 71= 0.3256
cos 72= 0.3090
cos 73= 0.2924
cos 74= 0.2756
cos 75= 0.2588
cos 76= 0.2419
cos 77= 0.2250
cos 78= 0.2079
cos 79= 0.1908
cos 80= 0.1736
cos 81= 0.1564
cos 82= 0.1392
cos 83= 0.1219
cos 84= 0.1045
cos 85= 0.0872
cos 86= 0.0698
cos 87= 0.0523
cos 88= 0.0349
cos 89= 0.0175

tg 1=0.0175
tg 2=0.0349
tg 3=0.0524
tg 4=0.0699
tg 5=0.0875
tg 6=0.1051
tg 7=0.1228
tg 8=0.1405
tg 9=0.1584
tg 10=0.1763
tg 11=0.1944
tg 12=0.2126
tg 13=0.2309
tg 14=0.2493
tg 15=0.2679
tg 16=0.2867
tg 17=0.3057
tg 18=0.3249
tg 19=0.3443
tg 20=0.3640
tg 21=0.3839
tg 22=0.4040
tg 23=0.4245

tg 24=0.4452
tg 25=0.4663
tg 26=0.4877
tg 27=0.5095
tg 28=0.5317
tg 29=0.5543
tg 30=0.5774
tg 31=0.6009
tg 32=0.6249
tg 33=0.6494
tg 34=0.6745
tg 35=0.7002
tg 36=0.7265
tg 37=0.7536
tg 38=0.7813
tg 39=0.8098
tg 40=0.8391
tg 41=0.8693
tg 42=0.9004
tg 43=0.9325
tg 44=0.9657
tg 45=1.0000
tg 46=1.0355

tg 47=1.0724
tg 48=1.1106
tg 49=1.1504
tg 50=1.1918
tg 51=1.2349
tg 52=1.2799
tg 53=1.3270
tg 54=1.3764
tg 55=1.4281
tg 56=1.4826
tg 57=1.5399
tg 58=1.6003
tg 59=1.6643
tg 60=1.7321
tg 61=1.8040
tg 62=1.8807
tg 63=1.9626
tg 64=2.0503
tg 65=2.1445
tg 66=2.2460
tg 67=2.3559
tg 68=2.4751
tg 69=2.6051

tg 70=2.7475
tg 71=2.9042
tg 72=3.0777
tg 73=3.2709
tg 74=3.4874
tg 75=3.7321
tg 76=4.0108
tg 77=4.3315
tg 78=4.7046
tg 79=5.1446
tg 80=5.6713
tg 81=6.3138
tg 82=7.1154
tg 83=8.1443
tg 84=9.5144
tg 85=11.4301
tg 86=14.3007
tg 87=19.0811
tg 88=28.6363
tg 89=57.2900

ctg 1=57.2900
ctg 2=28.6363
ctg 3=19.0811
ctg 4=14.3007
ctg 5=11.4301
ctg 6=9.5144
ctg 7=8.1443
ctg 8=7.1154
ctg 9=6.3138
ctg 10=5.6713
ctg 11=5.1446
ctg 12=4.7046
ctg 13=4.3315
ctg 14=4.0108
ctg 15=3.7321
ctg 16=3.4874
ctg 17=3.2709
ctg 18=3.0777
ctg 19=2.9042
ctg 20=2.7475
ctg 21=2.6051
ctg 22=2.4751
ctg 23=2.3559

ctg 24=2.2460
ctg 25=2.1445
ctg 26=2.0503
ctg 27=1.9626
ctg 28=1.8807
ctg 29=1.8040
ctg 30=1.7321
ctg 31=1.6643
ctg 32=1.6003
ctg 33=1.5399
ctg 34=1.4826
ctg 35=1.4281
ctg 36=1.3764
ctg 37=1.3270
ctg 38=1.2799
ctg 39=1.2349
ctg 40=1.1918
ctg 41=1.1504
ctg 42=1.1106
ctg 43=1.0724
ctg 44=1.0355
ctg 45=1.0000
ctg 46=0.9657

ctg 47=0.9325
ctg 48=0.9004
ctg 49=0.8693
ctg 50=0.8391
ctg 51=0.8098
ctg 52=0.7813
ctg 53=0.7536
ctg 54=0.7265
ctg 55=0.7002
ctg 56=0.6745
ctg 57=0.6494
ctg 58=0.6249
ctg 59=0.6009
ctg 60=0.5774
ctg 61=0.5543
ctg 62=0.5317
ctg 63=0.5095
ctg 64=0.4877
ctg 65=0.4663
ctg 66=0.4452
ctg 67=0.4245
ctg 68=0.4040
ctg 69=0.3839

ctg 70=0.3640
ctg 71=0.3443
ctg 72=0.3249
ctg 73=0.3057
ctg 74=0.2867
ctg 75=0.2679
ctg 76=0.2493
ctg 77=0.2309
ctg 78=0.2126
ctg 79=0.1944
ctg 80=0.1763
ctg 81=0.1584
ctg 82=0.1405
ctg 83=0.1228
ctg 84=0.1051
ctg 85=0.0875
ctg 86=0.0699
ctg 87=0.0524
ctg 88=0.0349
ctg 89=0.0175
ctg 90=0.0000

ДОДАТОК Б

СТЕПЕНІ ДЕЯКИХ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
n^2	4	9	16	25	36	49	64	81
n^3	8	27	64	125	216	343	512	729
n^4	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
n^5	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
n^6	64	729	4096	15625	46656			
n^7	128	2181						
n^8	256	6561						

Навчальне видання

Полінський Олександр Маркович
Пістунов Ігор Миколайович

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА, ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ З РОЗРАХУНКАМИ НА КОМП'ЮТЕРІ

Навчальний посібник

Редакційно-видавничий комплекс

Редактор С.Д. Рубан

Підписано до друку ___._____.2008. Формат 30 х 42/4.
Папір офсет. Ризографія. Умовн. друк. арк. 10,38.
Обл.-вид. арк. 10,38. Тираж 500 прим. Зам. №__

Підготовлено до друку та надруковано
у Національному гірничому університеті.
Свідоцтво про внесення до державного реєстру ДК №1842.
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К.Маркса, 19.