УДК [622+621+620.9+681.5+33+34+53]

**Тиждень студентської науки – 2014:** Матеріали студентської науково-технічної конференції 2014 р. – Д.: Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», 2014. – 210 с.

До збірки увійшли кращі доповіді на студентській науково-технічній конференції 2014 р.

***Редакційна колегія:***
О.С. Бешта (голова)
Р.О. Дичковський
С.В. Шевченко
Н.М. Вершиніна

© Державний вищий
навчальний заклад
«Національний гірничий
університет», 2014

Матеріали в збірнику друкуються мовою оригіналу в редакції авторів.

# ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛІВ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

*ДВНЗ «Національий гірничий університет»*

**Пілецький А.А.**
***Науковий керівник*: д.т.н., проф. Пістунов І.М.**

Завдяки Інтернету в наш час стає все більш актуальним торгівля цінними паперами на біржах різних країн. Вже не викликає сумнівів принцип хеджування капіталів за яким найбільш успішним можуть бути операції не з одним активом, а з портфелем цінних паперів.

У другі половині 20-го сторіччя провідні американські вчені, нобелевські лауреати Марковіц та Шарп розробили економіко-математичні моделі оптимальних портфелів цінних паперів.

Для використання моделі Шарпа потрібно відразу провести статистичні розрахунки портфелю цінних паперів.

Для кожного типу акцій встановлюються такі величини:

- середня дохідність паперів

$$M_j = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} d_{tj}; \qquad (1)$$

- дисперсія дохідності

$$D_j = \frac{N}{N-1}\sum_{t=1}^{N} d_{tj}^2 - M_j^2; \qquad (2)$$

- середнє квадратичне відхилення або математичний стандарт

$$\sigma_j = \sqrt{D_j} \qquad 1 \le j \le n. \qquad (3)$$

- коефіцієнт варіації (міра відхилення значень дохідності по відношенню до середнього значення

$$K_{\mathrm{var}\,j} = \frac{D_j}{M_j}. \qquad (4)$$

Коефіцієнт варіації слугує мірою ризикованості акцій. Якщо $K_{\mathrm{var}\,j} < 0{,}1$, то такий тип акцій вважається низько ризиковим, якщо $0{,}1 \le K_{\mathrm{var}\,j} < 0{,}25$ – середньо ризиковим, а коли $K_{\mathrm{var}\,j} > 0{,}25$ – високо ризиковим.

Далі, для кожної дати спостереження знаходимо середню дохідність усіх акцій на фінансовому ринку $-M_t$, тоді з'являється можливість знайти показники – $\alpha$ та $\beta$.

Вони визначаються як коефіцієнти лінійного рівняння залежності зміни дохідності акцій $j$-того типу $d_{tj} = \alpha + \beta M_t$ від середньої дохідності фінансово (5)

Для визначення цих показників користуємося функцією електронних таблиць Microsoft Exel:

**ЛИНЕЙН(известные значения *Y*; известные значения *X*; константа *1*; статистика *1*),**

де $Y$ – масив даних витрат на виробництво $y$; $X$ – масив даних обсягу виробництва $x$; *константа* – ознака проходження лінії регресії через 0 (0 – проходить, 1 – не проходить); *статистика* – потреба виводити статистичні дані про розрахунок параметрів лінійної регресії (1- якщо потрібно, 0 – якщо не потрібно).

Значення $\beta$ буде знаходитися у клітинці C3, а $\alpha$ – у клітинці D3. Рівень фінансового ризику окремих цінних паперів встановлюється на основі таких значень коефіцієнтів $\beta$:

$\beta = 1$ – середній рівень;
$\beta > 1$ – високий рівень;
$\beta < 1$ – низький рівень.

Якість керування цим типом акцій визначається через коефіцієнт $\alpha$:

$\alpha < 0$ – низький рівень;
$\alpha = 0$ – середній рівень;
$\alpha > 0$ – високий рівень.

Тоді, коли я отримав всі необхідні показники. То відразу приступив до формування оптимального портфелю паперів за моделлю Шарпа. Вона має вигляд:

$$\begin{cases} R_f + \sum_{j=1}^{N}(\alpha_j \cdot W_j) + (R_m - R_f)\cdot\sum_{j=1}^{N}(\beta_{Rj} W_j) \to \max; \\ \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{N}(\beta_{Rj} W_j)\right)^2 \cdot \rho_m^2 + \sum_{j=1}^{N}(\rho_j^2 W_j^2)} \le \rho_{req}; \\ W_j \ge 0; \\ \sum_{j=1}^{N} W_j = 1. \end{cases} \qquad (6)$$

де $W_j$ – частка $j$-ого набору акцій у диверсифікованому портфелі,

$\left.\begin{array}{l} \alpha_j \text{ – надлишкова прибутковість акції.} \\ \beta_i \text{ - ризик активу } i \text{ – ого активу у портфелі} \\ R_f \text{ - прибутковість за безризиковими операціями} \end{array}\right\}$ Тобто, це коефіцієнти, що визначають лінію тренду для кожної акції

$R_m$ – середня прибутковість акції.
$\rho_{req}$ – порогове значення ризику задане інвестором
$N$ – кількість цінних паперів у портфелі.

В своїй роботі я використав дві оптимізаційних моделі Марковіца:

Перша забезпечує мінімальний ризик і задану прибутковість, має вигляд:

$$\begin{cases} v_p = \sum\limits_i \sum\limits_j x_i x_j v_{ij} \to \min \\ \sum\limits_i x_i d_i = m_p \\ \sum\limits_i x_i = 1 \end{cases}$$

(7)

Друга забезпечує максимальну прибутковість й заданий (припустимий) ризик, має вигляд:

$$\begin{cases} m_p = \sum\limits_i x_i d_i \to \max \\ \sum\limits_i \sum\limits_j x_i x_j v_{ij} = r_p \\ \sum x_i = 1 \end{cases} \tag{8}$$

де $x_i$ – частка капіталу, витрачена на покупку цінних паперів $i$ – го виду, $d_i$- середня прибутковість цінних паперів $i$ – го виду у відсотках в розрахунку на одну грошову одиницю. $m_p$ – задана середня прибутковість цінних паперів усього портфелю, $v_p$ – коваріація доходностей паперів $i$ – го, та $j$ – го виду, коваріація усього портфелю цінних паперів. Якою вимірюється ризик портфелю, $r_p$ – задана середня коваріація цінних паперів усього портфелю (ризик).

Відповідні моделі Марковіца широко використовуються зараз для розрахунку ефективності інвестиційних проектів. Але це використання проводиться без критичного аналізу можливої межі моделей (7 – 8).

У 2003 році проф. Пістунов разом зі студентом Сітніковим створив ризиково-дохідну модель оптимізації цінних паперів. Основою цієї моделі було об'єднання моделей Марковіца з максимальною доходністю та мінімальним ризиком. Її перевагою над попередніми є відсутність необхідності завдавати прийнятний рівень ризику та доходу. Для цієї моделі використовуються ті ж самі статистичні розрахунки що і для моделі Марковіца.

«Ризиково-дохідна» модель Пістунова-Ситнікова має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sum\limits_i x_i^2 v^2{}_i + \sum\limits_i \sum\limits_j x_i x_j v_{x_i x_j}}}{\sum\limits_i x_i d_i} \to \min \\ \sum\limits_i x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

Для порівняння якості цих моделей було розроблено критерій відносного ризику:

$$Vr = R/M. \tag{10}$$

де $R$ – ризик, а $M$ – дохідність від акцій

Ризик знаходиться за формулою:

$$R = (Xi+Kvar)*Xтрансп. \tag{11}$$

$Xi$ – частка капіталу витрачена на покупку цінних паперів, $Kvar$ – коефіцієнт варіації, $Xтрансп$ – транспонована матриця $Xi$.

Дохід знаходиться:

$$M = Xi+Mj. \tag{12}$$

де, $Xi$ – частка капіталу витрачена на покупку цінних паперів, $Mj$ – середня прибутковість кожного паперу протягом певного періоду.

Критерій відносної ризиковості, на мою думку, показує рівень ефективності моделі, оскільки він визначає відношення ризику до доходу портфелю.

Для перевірки висунутої гіпотези датчиком випадкових чисел, розподілених за рівномірним законом, було згенеровано 30 груп доходностей для шести типів цінних паперів. Таким же чином було згенеровано прийнятні значення ризику та доходності портфеля для моделей Шарпа і Марковіца.

Результати розрахунків наведено в табл. 1

За таблицею для наочності побудовано графіки відносного ризику (рис. 1).

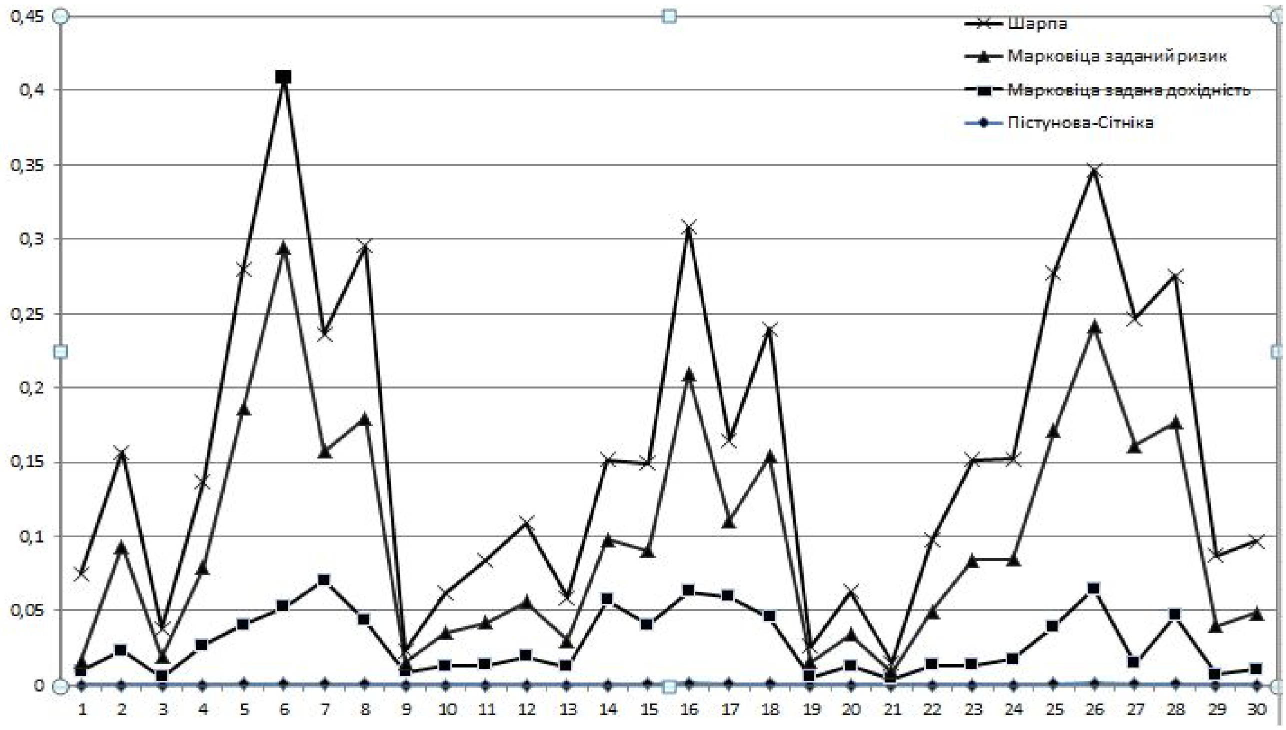


Рис. 1 Порівняння відносного ризику для описаних вище моделей

Таблиця 1

Результати знайдення оптимального портфеля цінних паперів

| | Пістунова-Сітніка | | | Марковіца задана дохідність | | | Марковіца заданий ризик | | | Шарпа | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № | дохід | ризик | р/д | дохід | ризик | р/д | дохід | ризик | р/д | дохід | ризик | р/д |
| 1 | 13,54192 | 0 | 0 | 13 | 0,124877 | 0,009606 | 12,82308 | 0,088 | 0,006863 | 15,08447 | 0,88 | 0,058338 |
| 2 | 13,35716 | 0,003356 | 0,00025124 | 12,5 | 0,285518 | 0,022841 | 14,17453 | 1 | 0,070549 | 15,781 | 1,00 | 0,063367 |
| 3 | 13,96986 | 0,000103 | 7,3475E-06 | 13,3 | 0,06899 | 0,005187 | 14,1885 | 0,2 | 0,014096 | 10,75789 | 0,20 | 0,018593 |
| 4 | 14,15828 | 0,004461 | 0,00031507 | 14 | 0,369139 | 0,026367 | 14,70727 | 0,77 | 0,052355 | 13,34926 | 0,77 | 0,057683 |
| 5 | 13,64679 | 0,007489 | 0,00054881 | 12,8 | 0,510474 | 0,039881 | 13,74795 | 2 | 0,145476 | 17,47625 | 1,64 | 0,093934 |
| 6 | 13,31654 | 0,012841 | 0,0009643 | 13,123 | 0,67785 | 0,051654 | 13,35243 | 3,23 | 0,241904 | 28,25095 | 3,23 | 0,114332 |
| 7 | 13,23982 | 0,009822 | 0,00074184 | 12 | 0,835488 | 0,069624 | 13,84808 | 1,2 | 0,086655 | 15,20854 | 1,20 | 0,078903 |
| 8 | 13,74526 | 0,009575 | 0,00069658 | 13,25 | 0,567801 | 0,042853 | 14,69881 | 2 | 0,136065 | 17,19546 | 1,99 | 0,115821 |
| 9 | 13,63574 | 0 | 0 | 13,333001 | 0,118425 | 0,008882 | 12,44662 | 0,08 | 0,006427 | 10,23341 | 0,08 | 0,007818 |
| 10 | 12,92771 | 0 | 0 | 12 | 0,151265 | 0,012605 | 13,08977 | 0,3 | 0,022919 | 11,33154 | 0,30 | 0,026475 |
| 11 | 13,52108 | 0,002274 | 0,00016819 | 12 | 0,158029 | 0,013169 | 13,84255 | 0,4 | 0,028896 | 9,573695 | 0,40 | 0,041781 |
| 12 | 13,35497 | 0,005574 | 0,00041738 | 12,8 | 0,243165 | 0,018997 | 13,59506 | 0,5 | 0,036778 | 9,495885 | 0,50 | 0,052654 |
| 13 | 13,95321 | 0,000244 | 1,7474E-05 | 13,5 | 0,167706 | 0,012423 | 14,21187 | 0,25 | 0,017591 | 8,747305 | 0,25 | 0,02858 |
| 14 | 14,26802 | 0,004916 | 0,00034453 | 12,627165 | 0,720492 | 0,057059 | 14,58166 | 0,596001 | 0,040873 | 11,14712 | 0,60 | 0,053467 |
| 15 | 13,71465 | 0,007867 | 0,00057361 | 13 | 0,51623 | 0,03971 | 13,95263 | 0,7 | 0,05017 | 11,88415 | 0,70 | 0,058902 |
| 16 | 13,36926 | 0,016525 | 0,00123608 | 13,5 | 0,829656 | 0,061456 | 13,66464 | 1,999999 | 0,146363 | 20,20605 | 2,00 | 0,09898 |
| 17 | 13,06133 | 0,007087 | 0,00054261 | 12 | 0,70859 | 0,059049 | 13,33941 | 0,680001 | 0,050977 | 12,55045 | 0,68 | 0,054181 |
| 18 | 13,46608 | 0,010393 | 0,00077179 | 13,33 | 0,596051 | 0,044715 | 13,86821 | 1,500001 | 0,108161 | 17,39264 | 1,50 | 0,086243 |
| 19 | 13,76724 | 0,000143 | 1,04E-05 | 10 | 0,052033 | 0,005203 | 12,67173 | 0,100001 | 0,010318 | 9,615203 | 0,10 | 0,0104 |
| 20 | 12,79442 | 0 | 0 | 12 | 0,152984 | 0,012749 | 13,02375 | 0,280001 | 0,021499 | 9,77008 | 0,28 | 0,028659 |
| 21 | 13,531 | 0,002115 | 0,00015631 | 13,6 | 0,054862 | 0,004034 | 13,807 | 0,06 | 0,004346 | 9,224488 | 0,06 | 0,006504 |
| 22 | 13,32808 | 0,005326 | 0,00039964 | 13,281 | 0,175037 | 0,01318 | 13,76908 | 0,5 | 0,036313 | 10,52073 | 0,50 | 0,047525 |
| 23 | 13,69428 | 0,001074 | 7,842E-05 | 12,63 | 0,165018 | 0,013065 | 14,04537 | 1 | 0,071198 | 14,8494 | 1,00 | 0,067343 |
| 24 | 14,20438 | 0,002347 | 0,0001652 | 14 | 0,243773 | 0,017412 | 14,75771 | 0,99 | 0,067084 | 14,71679 | 0,99 | 0,06727 |
| 25 | 13,46639 | 0,010705 | 0,00079497 | 13,0503 | 0,500998 | 0,03839 | 13,67279 | 1,8 | 0,131648 | 16,88182 | 1,80 | 0,106624 |
| 26 | 13,70646 | 0,015769 | 0,00115046 | 13,4768 | 0,854067 | 0,063373 | 14,14067 | 2,500001 | 0,176795 | 23,7237 | 2,50 | 0,10538 |
| 27 | 13,08299 | 0,010753 | 0,00082189 | 12,6531 | 0,172856 | 0,013661 | 13,63697 | 2,000001 | 0,14666 | 16,11149 | 1,38 | 0,085367 |
| 28 | 13,46821 | 0,010727 | 0,00079648 | 13,209 | 0,609299 | 0,046128 | 13,87506 | 1,800001 | 0,129729 | 18,19562 | 1,80 | 0,098925 |
| 29 | 13,86704 | 0 | 0 | 12,4891 | 0,085098 | 0,006814 | 14,76378 | 0,488 | 0,033054 | 10,35062 | 0,49 | 0,047147 |
| 30 | 12,74443 | 0,002346 | 0,0001841 | 12,126 | 0,125122 | 0,010318 | 13,20674 | 0,500001 | 0,03786 | 10,34561 | 0,50 | 0,04833 |
| | | срзн | 0,00040516 | | срзн | 0,028014 | | срзн | 0,070987 | | срзн | 0,060984 |

Висновки; проведений чисельний експеримент показує, що середня відносна ризикованість для моделі Пістунова-Ситнікова на два порядки менша за моделі нобелівських лауреатів, а отже саме нею варто користатися при формуванні оптимальних портфелів цінних паперів.

## Список літератури

1. Пістунов І.М. Оптимальні рішення в інвестиційному проектуванні : Навч. посібник./ І.М.Пістунов, К.І.Пістунова – Д.: НГУ, 2007.– 108 с.
2. Шарп Уильям Ф.. Инвестиции. / Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли. – ИНФРА-М. 2007.– 258 с.
3. Пістунов І.М. Дослідження межі існування оптимальних рішень для портфеля Марковіца / І.М. Пістунов, В.В. Ситніков // Економічний вісник НГУ. - №4, 2003. – С. 114-119.

**Тиждень студентської науки – 2014:** Матеріали студентської науково-технічної конференції 2014 р. – Д.: Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», 2014. – 210 с.

***Редакційна колегія:***
О.С. Бешта (голова)
Р.О. Дичковський
С.В. Шевченко
Н.М. Вершиніна

Підготовлено в електронному вигляді
в Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет».

49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.