Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
"Дніпровська політехніка"

І.М. Пістунов

ЗБІРНИК ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Для дисципліни
«Економік-математичне моделювання»

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

УДК 004.738.5:338.46(075)
БКК 32.973.202я73
П34

Затверджено вченою радою університету як навчальний посібник по дисципліні «Економіко-математичне моделювання» для студентів очної та заочної форм навчання зі спеціальності 051 Економіка (Протокол № від р).

Рецензенти:

А.В. Бардась, докт. екон. наук, проф., декан факультету менеджменту Національного гірничого університету;

Н.К.Васильєва, док. екон. наук, проф., -завідувач кафедри інформаційних систем і технологій Дніпровського агро-економічного університету.

Пістунов І.М.

П34 Збірник індивідуальних завдань для дисциплін «Економіко-математичне моделювання [Електронний ресурс]: Навч. посібник/ І.М. Пістунов. – Дніпро: Державний НТУ «ДП», 2024. – 79 с. Режим доступу: http://pistunovi.inf.ua/ EMM_Ind_Task_ПiСТУНОВ.pdf (дата звернення: 26.01.2024). – Назва з екрана.

У збірнику наведено задачі з розрахунку оптимізаційних задач, задач з теорії ігор, у тому числі і кооперативних, задач з теорії масового обслуговування, транспортних задач, задач з побудови нечітких моделей та нейронних сіток.

Збірник скомпоновано для практичних чи лабораторних занять із застосуванням комп'ютерної техніки.

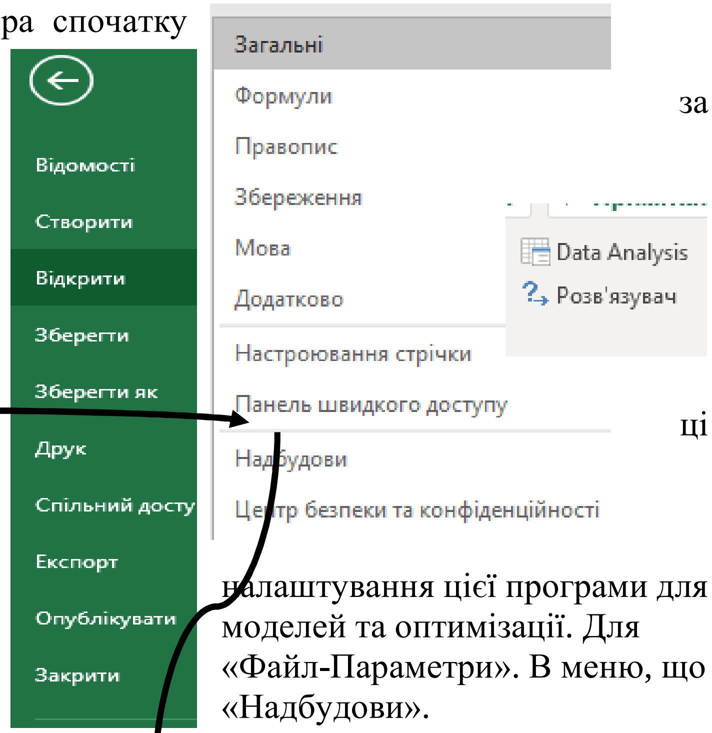
Призначений для студентів вищих учбових закладів і може бути корисним для фінансистів, економістів, плановиків, менеджерів та маркетологів.

Посібник базується на літературних джерелах вітчизняних, зарубіжних авторів, ресурсах Інтернету та на досвіді викладання дисципліни «Економіко-математичне моделювання» в Державному НТУ «ДП».

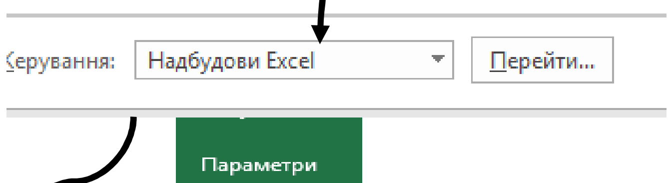
ЗМІСТ

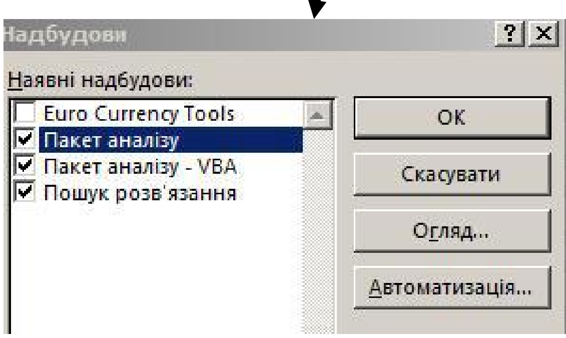
1. ВКАЗІВКИ ДО РОБОТИ З EXCEL

1. Ті завдання, які студенти виконують із застосуванням табличного процесора Excel з версії Microsoft Office не пізніше 2007 року.
1. Числові значення кожного завдання обираються з таблиць, вміщених для кожного завдання окремо.
2. На сторінці процесора спочатку вставляється текст задачі, потім, значення букв, потім формула, якою вирішується задача, далі рішення і текстові висновки.
3. Перед початком роботи потрібно налаштувати Microsoft Excel. Доступ до надбудов здійснюється через головне меню «Дані» і у правому кутку можна побачити надбудови .



Після інсталяції Microsoft Office, куди входить і програма Excel, необхідно провести налаштування цієї програми для розрахунків коефіцієнтів моделей та оптимізації. Для цього потрібно вибрати пункт «Файл-Параметри». В меню, що з’явиться, вибрати пункт «Надбудови».





Далі клацнути на кнопку «перейти» та відмітити вказані на рисунку позиції і натиснути «ОК» у цьому і наступних вікнах. Тепер в головному меню програми за пунктом «Дані» у правому кутку меню з’являться пункти «Data Analysis» та «Розв’язувач».

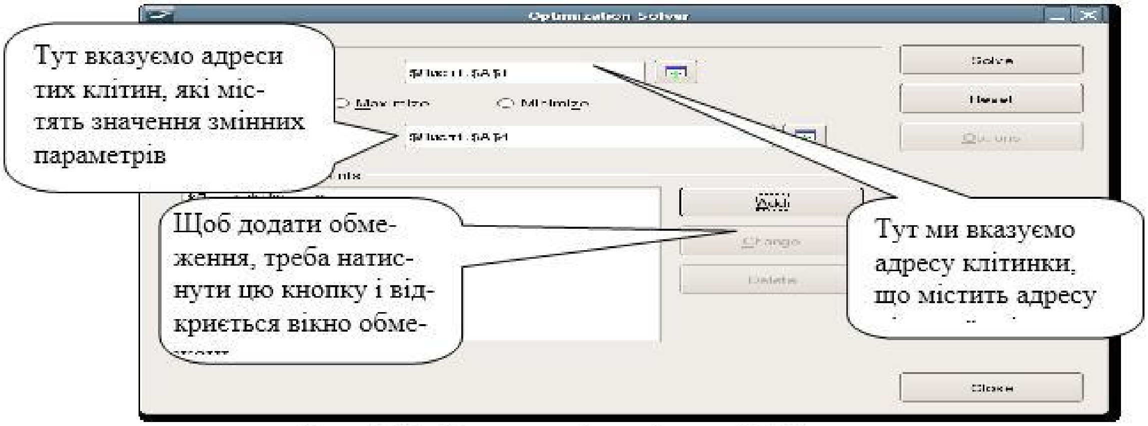
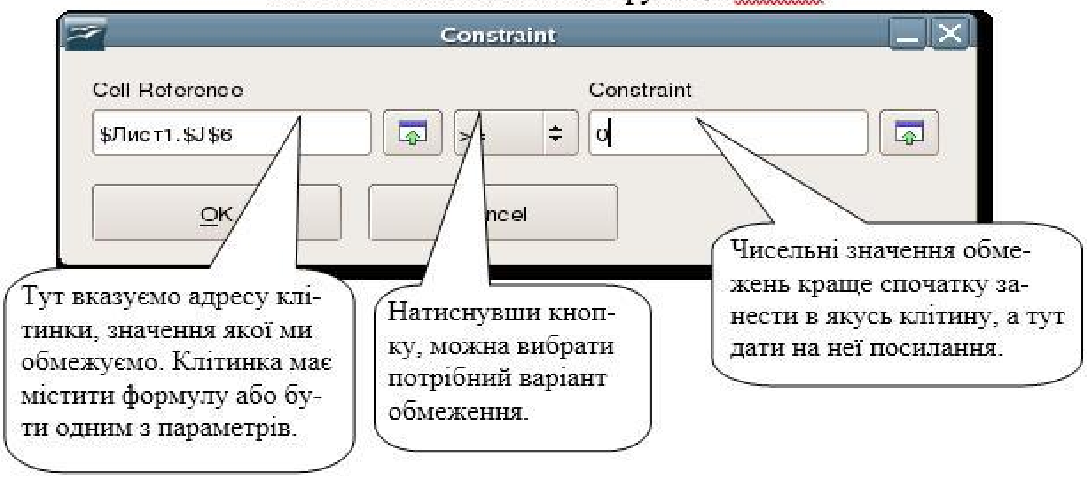
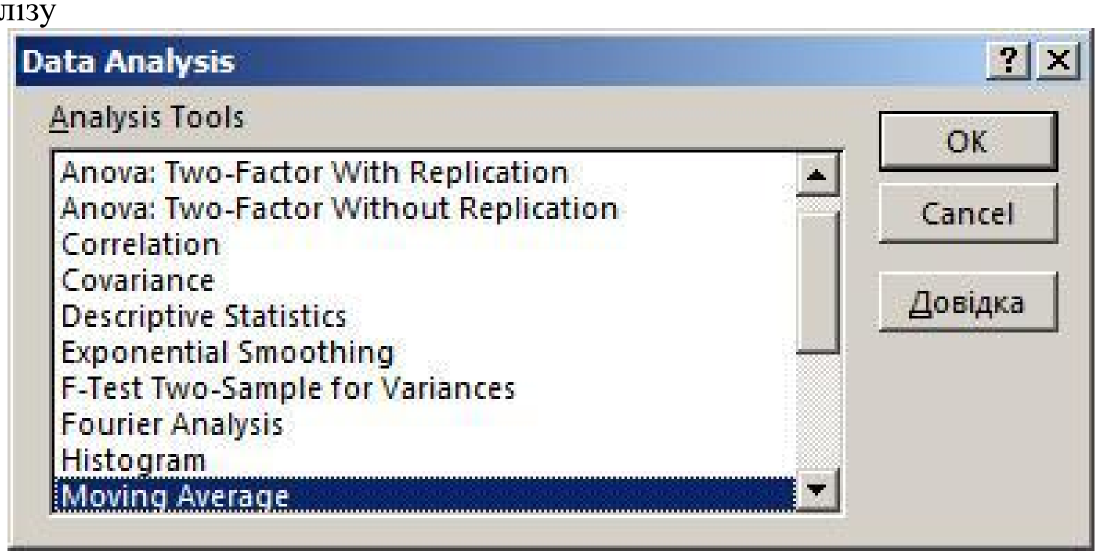


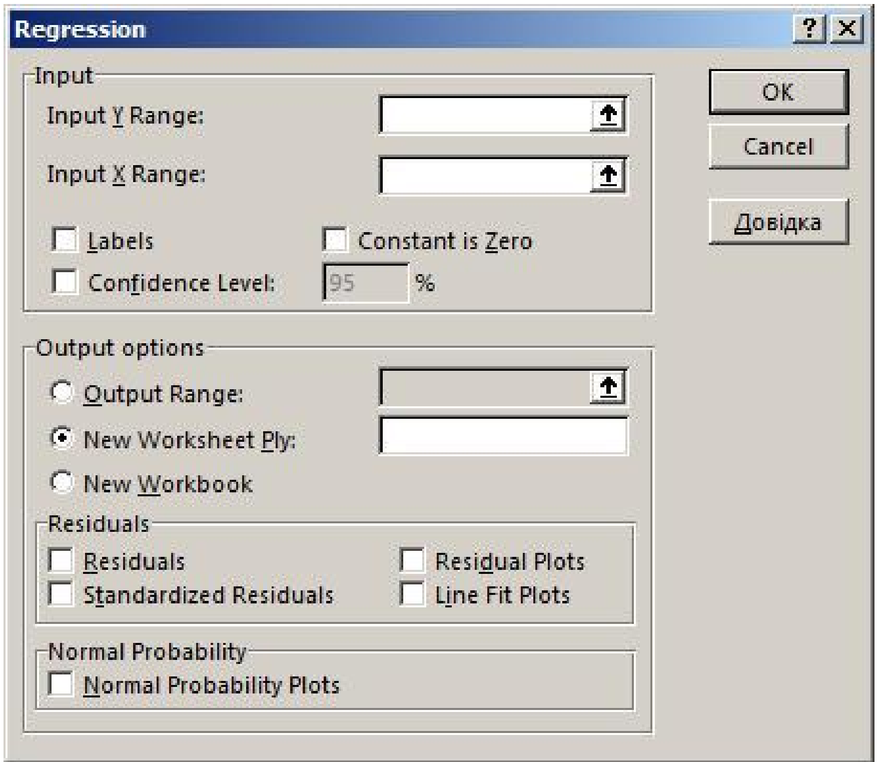
Рис. 3.12. Головне вікно функції Solver



4. При використанні функції «Аналіз даних» ви обираєте зі списку потрібний вид аналізу



Наприклад, якщо обираєте пункт «Регресія», то побачите наступне вікно



Порядок користування різними підпрограмами вам буде роз'яснено на практичних заняттях.

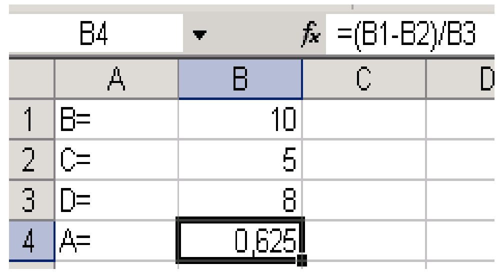
5. Завдання треба здавати в електронному вигляді на будь яких носіях у конвертах, які потрібно підписувати таким чином. Допускається здавати всі завдання на одному носії.

Задачу спочатку треба розв'язати в загальному вигляді з представлення формули рішення, в яку потім підставлені конкретні числові дані для свого варіанта. В деяких завданнях числові значення потрібно визначити за простою формулою. Наприклад, якщо в таблиці навпроти позначення ***C*** стоїть число 17, а числове значення в умові задачі подано як $\mathbf{0{,}01}\cdot \boldsymbol{C}$, то це означає, що потрібно брати число $0{,}01\cdot 17 = 0{,}17$.

Кожну тему супроводжують приклади вирішення із застосування таких прикладних пакетів як Open Office Calc, Microsoft Office Excel, Macsima та MathCad. При цьому припускається, що студенти вже знайомі з порядком використання як електронних таблиць так і математичних процесорів.

Наприклад, якщо потрібно провести розрахунки за формулою $A = \dfrac{B - C}{D}$, для наступних числових значень параметрів $B = 10$, $C = 5$, $D = 8$, то в підрозділі буде наведено малюнок, в якому видно фрагмент вікна електронної таблиці, де колонку А займають тестові визначення невідомих у формулі, колонку В – їх числові значення. Вікно f_x містить саму формулу розрахунку, де вказано адреси клітинок, які містять числові дані.

Якщо будуть застосовані функції електронних таблиць, то буде показано їх вікно з уведеними туди параметрами



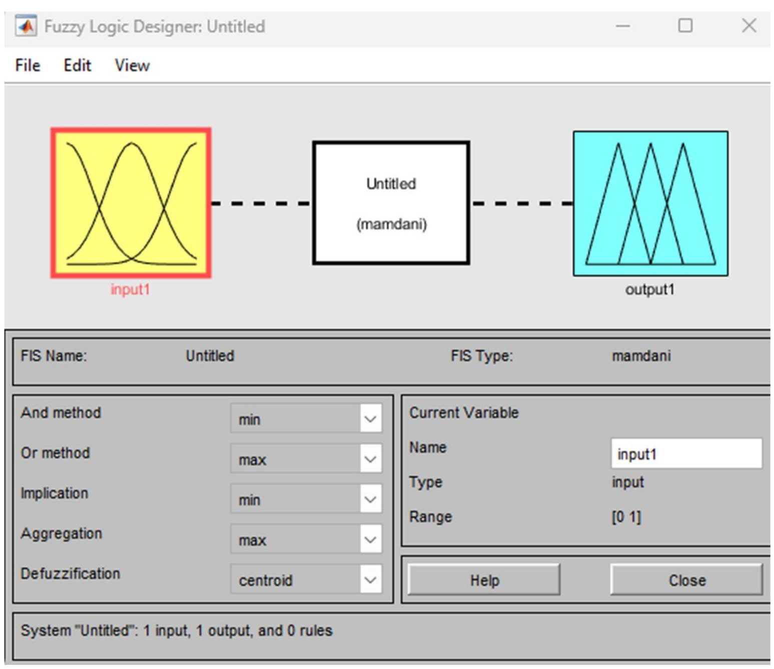
2. ВКАЗІВКИ ДО РОБОТИ З MATLAB

Завантажуйте програму MATLAB за посиланням https://myngu-my.sharepoint.com/:u:/g/personal/pistunov_i_m_nmu_one/EYV6NyKGLJZIovScEJYI_fQBtnG2_NazVgq-X_3NHZqqow?e=ig2dQo

Розпакуйте пакет та інсталюйте програму згідно інструкції Readme.txt, що міститься у папці Serial.

Увімкніть програму і у вікні, що відкриється, напишіть команду **fuzzy**.

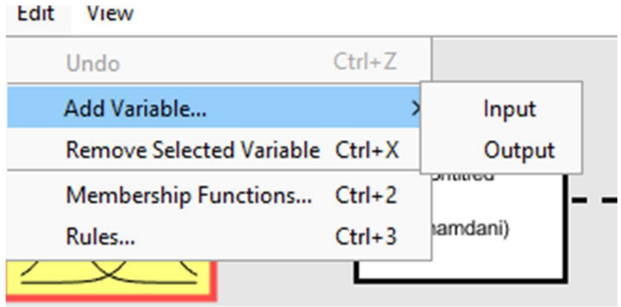
Відкриється основне вікно підпрограми, що моделює нечіткі множини.



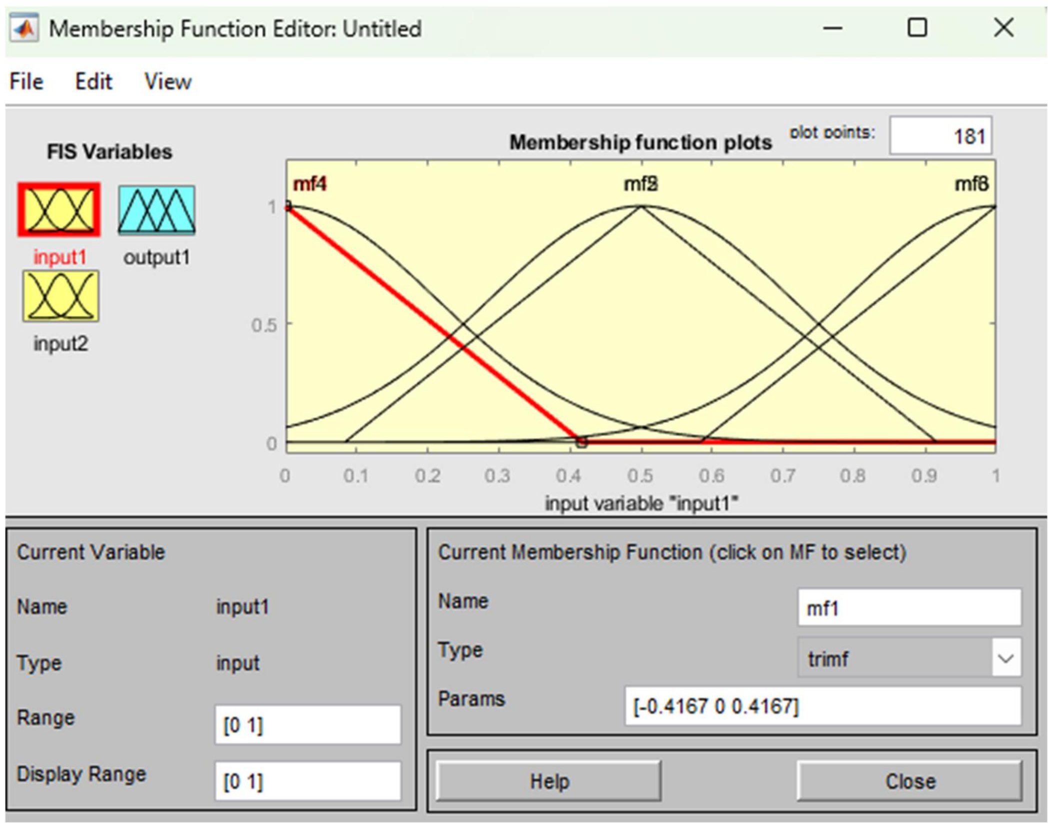
Це вікно графічно зображає стандартну конструкцію нечіткого логічного висновку виду **ЯКЩО X1 ТА X2 ТО Y.**

Тут вхідні сигнали задаються через **input**, а вихідний – через **output**.

Для збільшення їх числа скористайтеся меню **Edit**

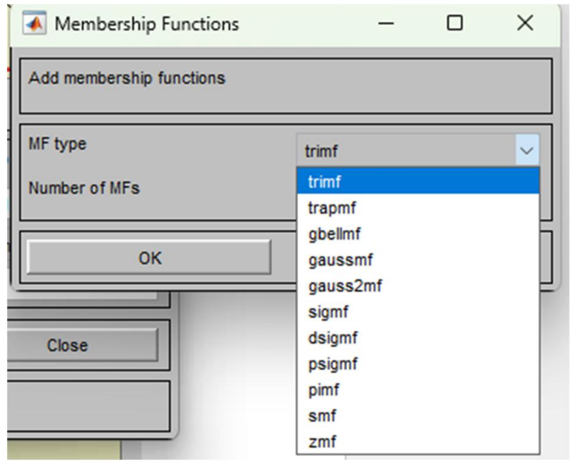


Створення виду графіку, що описує нечітку змінну виконується шляхом натискання на зображення конкретної змінної. У вікно Range ви вказуєте діапазон значень числового аргументу цієї нечіткої функції..

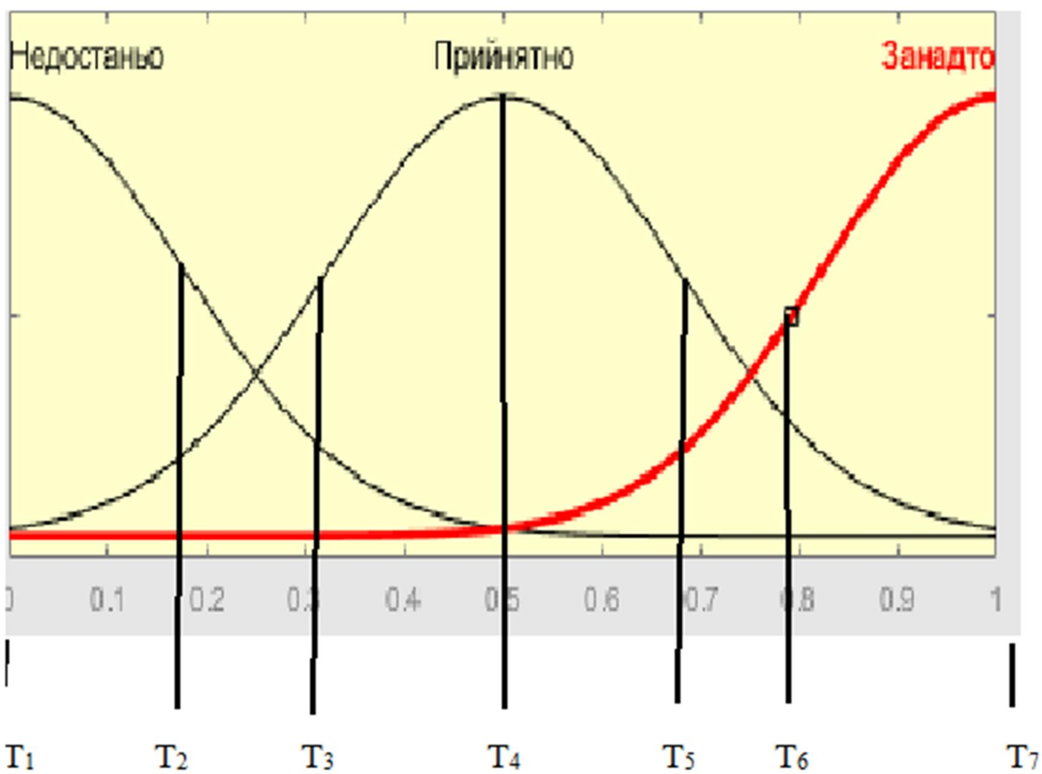


Вибір типу функції здійснюється чберез меню Edit – Add MFs…

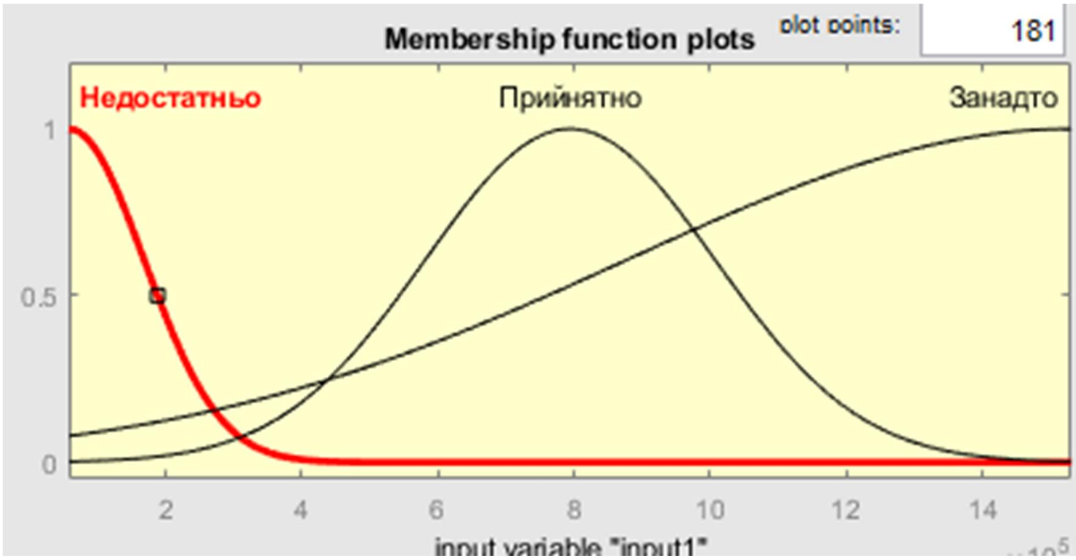
Варто пам’ятати, що кожна нечітка змінна повинна описуватися трьома нечіткими правилами типу: **недостатньо, середнє та занадто.**



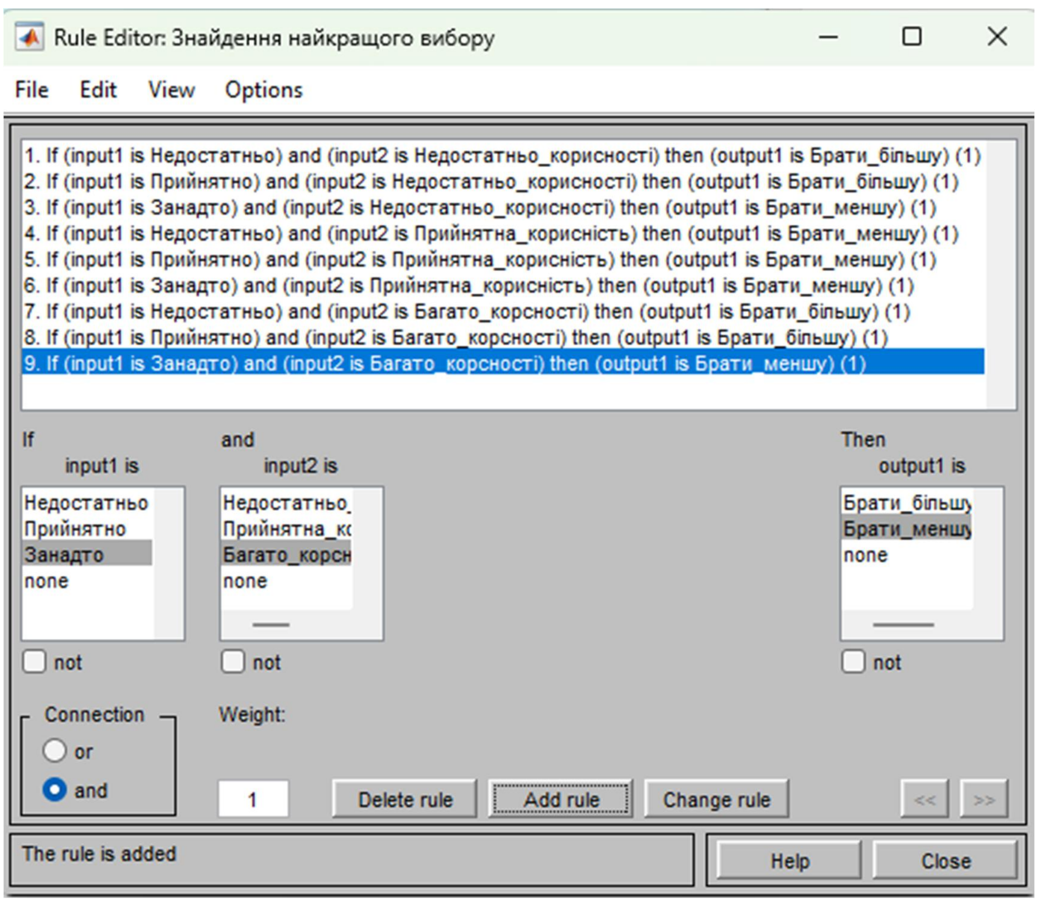
Завдання значень функції приналежності – це фактично визначення числових значень точок Т1 – Т7. Підгонка числових значень здійснюється простим рухом курсора при натиснутій лівій кнопці мишки, встановленого на кожен вид кривої.



Ось приклад такої зміни. Також кожна змінна і кожна крива цієї змінної може бути підписана її логічним значенням.

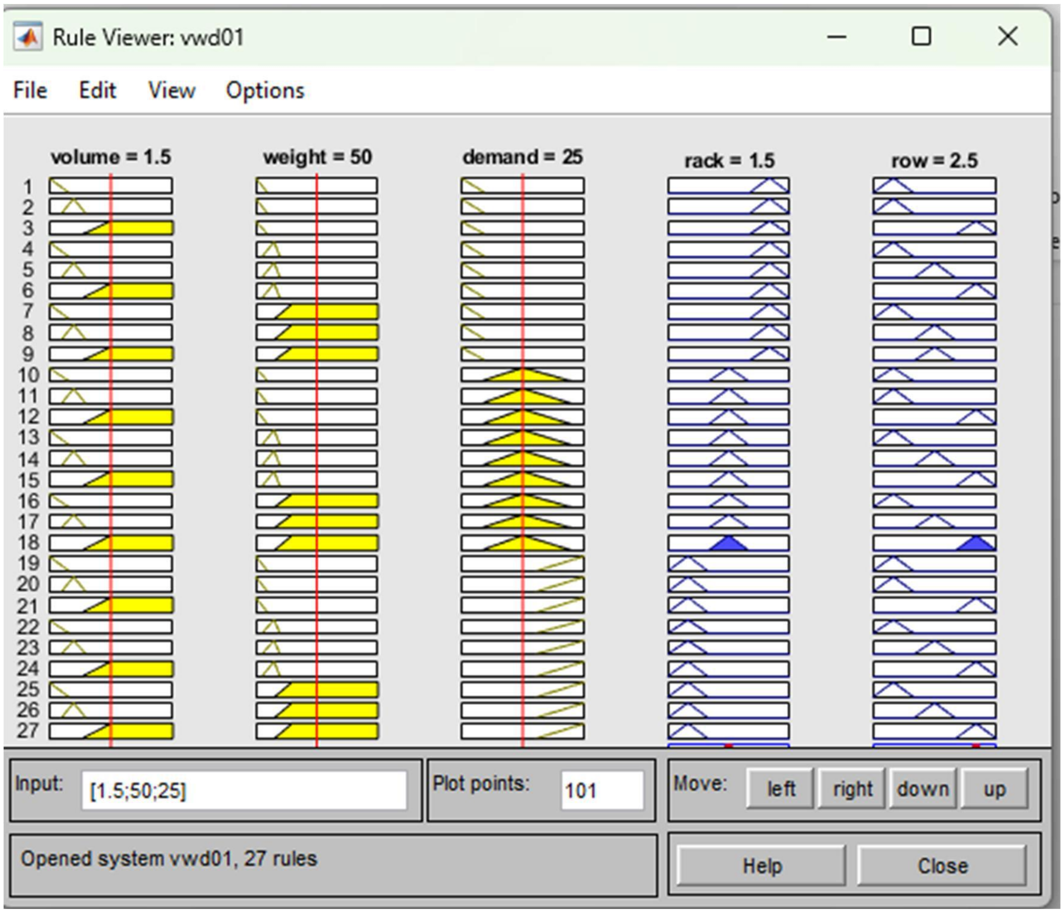


Завдання нечітких правил виконується через меню **Edit – Rules** або натисканням кнопки **Ctlr + 3**.



Тут ви послідовно задаєте кожне нечітке правило згідно логічних позначень ваших вхідних і вихідних нечітких змінних.

Натиснувши кнопку **CTRL + 5** ви отримаєте графічне представлення нечіткого виводу.



Тепер у вас є можливість отримувати чіткі висновки за чіткими значення вхідних параметрів. Для зміни значення вхдіного параметру, встановіть курсор мишки на червоній лінії, яка проходить спочатку через центр параметру. Натисніть ліву кнопку і рухайте мишку вліво-вправо, дивлячись на значення **volume** цього параметру. Коли це значення стане необхідним, відпустіть ліву кнопку і прочитайте значення **volume** на вихідному параметрі.

Таким чином ви можете скласти таблицю відповідних значень X та Y, яку в подальшому опишете якимось простим рівнянням методами, описаними в курсі Економетрика.

3. ВКАЗІВКИ ДО РОБОТИ З STATISTICA

Скачайте програму з https://myngu-my.sharepoint.com/:u:/g/personal/pistunov_i_m_nmu_one/EcpSEJP8OQVEqHpVgMLklFoBgKM9M0Si3voGj1pn7lvbIQ?e=hA2j6e

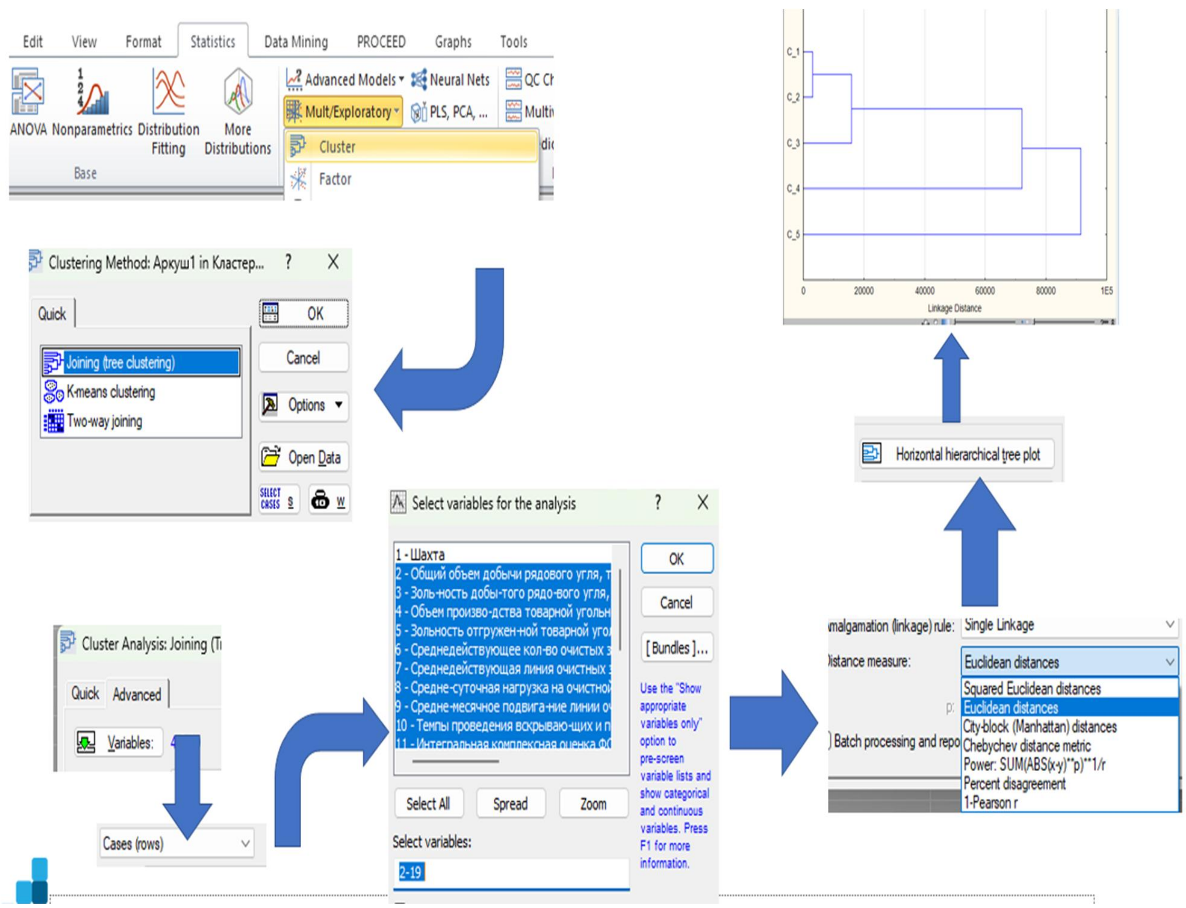
Розпакуйте на ваш комп'ютер та виконайте інсталяцію програми згідно інструкції, що міститься у папці **ST10R** під іменем **Инструкция.txt.**

Відкрийте програму та завантажте файл з даними.

Використайте пункт головного меню Statistics-Mult/Exploratory-Cluster.

Оберіть розрахунок міри відстані та отримайте графік міри близькості об'єктів.

Виділіть об'єкти у кластери згідно принципу «найбільшої сходинки».



4. ПРИКІНЦЕВІ ПОЛОЖЕННЯ

Метою даного курсу є практичне засвоєння студентами методів та прийомів, які дозволяють економістам знайти найкращі рішення у практичній діяльності.

Для цього використовуються спеціальні програми, описані вище.

Звіт з кожного індивідуального завдання може подаватися тільки в електронному вигляді у форматі *.DOCX або *.XLSX.

Звіт має містити:

1. Опис завдання.
2. Початкові значення
3. Результат розрахунку
4. Зображення активних вікон спеціальних програм.
5. Висновки.

Останній пункт є найважливішим, оскільки головним у цьому курсі є не вміння провести розрахунки, але розуміння, для чого ці розрахунки проводяться, що означають з економічної точки зору отримані результати, де можна застосувати кожен конкретний метод і яку вигоду він принесе в реальній економічний діяльності.

Відповіді на всі ці питання і має містити висновок.

5. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ№1.

Математичне програмування

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета роботи: Набути навичок складання математичної моделі задачі планування виробництва та її реалізації із використанням табличного процесору Excel.

1. Побудувати математичну модель представленого у варіанті завдання.
2. Ввести дані і формули на аркуш Microsoft Excel.
3. За допомогою інструменту Пошук рішення знайти рішення задачі.
4. Провести аналіз отриманих результатів.

Теоретичні відомості.

Для прикладу розглянемо рішення наступної задачі.

Умова задачі: Кондитерська фабрика для виготовлення трьох видів карамелі "Му-му", "Слива", "Ягідка" використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку, фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1т карамелі даного виду наведені у таблиці. В ній же наведена загальна кількість сировини кожного виду, яка може використовуватись фабрикою, а також прибуток від реалізації 1т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 (т) карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	"Му-му"	"Слива"	"Ягідка"	
Цукор	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,2	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	0	0,1	0,1	120

Прибуток від реалізації 1т продукції, грн	108	112	126	

Визначимо план виробництва карамелі, який забезпечує найбільший прибуток від її реалізації. Складемо математичну модель. Цільова функція:

$108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to \max$, обмеження:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 800, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 600, \\ 0x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \le 120, \\ x_j \ge 0, \quad j = (1,2,3). \end{cases}$$

Розв’язання: Реалізація в Excel.

Створюємо таблицю з формулами, які пов'язують план, обмеження і цільову функцію (прибуток). Загальний вигляд розв'язку задачі планування виробництва наступний (рис.1):

	A	B	C	D	E	F
1					Загальна кількість сировини (т)	
2	Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 (т) карамелі				
4		"Му-му"	"Слива"	"Ягідка"		
5	Цукор	0,8	0,5	0,6	800	='СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$10:$D$10)
6	Патока	0,2	0,4	0,3	600	='СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$10:$D$10)
7	Фруктове пюре	0	0,1	0,1	120	='СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$10:$D$10)
8	Прибуток від реалізації 1т продукції, грн	108	112	126		='СУММПРОИЗВ(B5:D5;$B$10:$D$10)
9						
10	x_i	0	0	0		

Рис. 1.1. Початкова таблиця з формулами

Запускаємо програму Пошук рішень командою Дані/ Аналіз /Пошук рішення. В полях Встановити цільову комірку, Змінюючи осередки, Обмеження вводимо відповідні адреси осередків. Так як це лінійна модель, то не забуваємо фіксувати в вікні Параметри пошуку рішень перемикач на позицію Лінійна модель і невід'ємні значення.

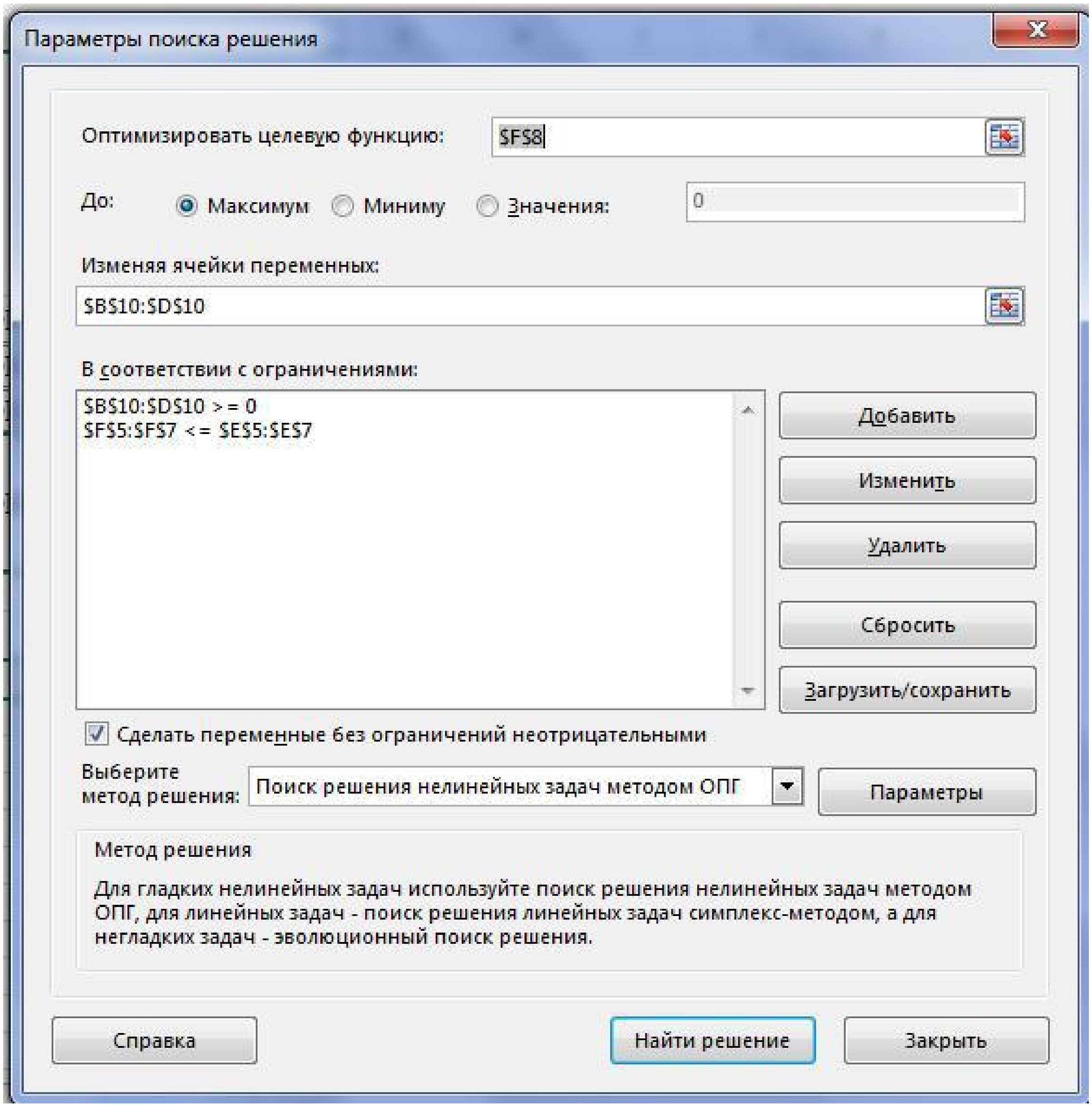


Рис. 1.2. Вікно надбудови «Пошук Рішення»

	A	B	C	D	E	F	G
1	Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 (т) карамелі			Загальна кількість сировини (т)	Використана кількість сировини (т)	
2							
4		"Му-му"	"Слива"	"Ягідка"			
5	Цукор	0,8	0,5	0,6	800	800,00	
6	Патока	0,2	0,4	0,3	600	380,00	
7	Фруктове пюре	0	0,1	0,1	120	120,00	
8	Прибуток від реалізації 1т продукції, грн	108	112	126		162000,00	ЦФ
9		x 1	x 2	x 3			
10	x i	100	0	1200			

Рис. 1.3. Результат після оптимізації

Відповідь: Для того щоб фірма могла отримувати максимальний прибуток 162000 грн. від продажу 1т. цукерок, вона має випускати цукерки "Му-му" (100 т.), цукерки "Ягідка" (1200 т.), виробництво цукерок "Слива" не є прибутковим, тому випускати їх не рекомендується. При збільшенні кількості сировини на 100 одиниць, всі показники кардинально змінюються.

Практична робота складається з двох задач. Першу задачу студент обирає з наведених нижче варіантів за останнім номером залікової книжки. В нумерації задач перша цифра – номер задачі, друга – останній номер залікової книжки. Друга задача обирається за номером в списку групи.

Варіанти І завдання

1.0. Цех консервного заводу для виготовлення 3-х партій консервів використовує послідовно різне технологічне обладнання. Витрати обладнання на партію консервів кожного виду вказані в таблиці.

Групи обладнання	Технічні коефіцієнти			Ціна (грн.)
	продукція І	продукція ІІ	продукція ІІІ	
А	2	4	5	120
В	1	8	6	280
С	7	4	5	140

D	4	7	6	360
Прибуток (грн.)	10	14	12	

Технічні коефіцієнти вказують, яка кількість кожного виду обладнання необхідно для виготовлення продукції кожного виду. Знайти розв'язок, взявши за мету максимальний прибуток.

1.1. У буфеті студентської їдальні реалізуються бутерброди 3 видів А, В, С. Їх підготовка і реалізація вимагають використання 3 видів ресурсів, норми витрат яких наведені у таблиці:

Види ресурсів	Норми витрат ресурсів на 1 партію бутербродів			Запас ресурсів
	A	B	C	
I	2	1	2	38
II	1	3	2	44
III	3	2	1	40
Прибуток (грн.)	7	6	4	

Визначити план продажу бутербродів, який забезпечить максимум прибутку від їх реалізації.

1.2. Цех м'ясокомбінату для виготовлення 3 видів консервів використовує послідовно різне технологічне обладнання. Витрати обладнання на партію виробів кожного виду та його ціна наведені у таблиці.

Технічні коефіцієнти вказують, яка кількість кожного виду обладнання необхідна для виготовлення партії консервів кожного виду. Знайти розв'язок, взявши за мету максимальнийприбуток.

Групи обладнання	Технічні коефіцієнти			Ціна (грн.)
	"Сніданок туриста"	"Паштет печінковий"	"Паштет міський"	
A	18	15	12	360
B	6	4	8	192
C	5	3	3	180
Прибуток (грн.)	9	10	16	

1.3. На консервному заводі виготовляють 3 види молочних сумішей для чого використовують з види сировини. Норми витрат сировини на виробництво кожного виду сумішей, запаси сировини, атакож прибуток від реалізації кожного виду сумішей наведені у таблиці:

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1(т) сумішей			Запаси сировини (т)
	"Малюк"	"Ведмедик"	"Сонечко"	
Молоко сухе	0,8	0,5	0,6	900
Мука рисова	0,4	0,4	0,3	700
Цукор	0	0,1	0,1	1000
Прибуток (грн.)	108	112	126	

Визначити план виробництва сумішей, який забезпечить найбільший прибуток.

1.4. Консервний завод для виробництва 3 видів овочевих консервів "Салат овочевий", "Перець фаршований", "Перчинка" використовує три види основної сировини: перець, томатний соус, моркву. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1партії консервів наведені у таблиці. В ній же наведена загальна кількість сировини кожного виду, яка може використовуватись консервним заводом, а також й прибуток від реалізації кожного виду консервів.

Вид сировини	Норми витрати сировини			Запас сировини (т)
	"Салат овочевий"	"Перець фаршировани й"	"Перчинка"	
Перець	0,25	0,4	0,5	160
Томатний соус	0,3	0,25	0,5	180
Морква	0,7	0,5	0	140
Прибуток (грн.)	216	224	222	

Визначити план виробництва продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

1.5. Цех консервного заводу налагоджує виробництво 3 видів продукції, для чого потрібне обладнання і певні витрати праці. У таблиці наведені норми витрат усіх видів ресурсів та їх наявні запаси.

Види ресурсів	Витрати ресурсів на одиницю продукції			Запас ресурсів
	продукція I	продукція II	продукція III	
Обладнання	2	4	5	510
Витрати на виробництво	4	6	2	640
Витрати на обслуговування	0,5	0,3	0,3	50
Прибуток від виробництва одиниці продукції	0,8	0,8	0,7	

Визначити план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

1.6. Цех напівфабрикатів виробляє два види продукції і при цьому використовує чотири види сировини у кількості, вказаній нижче.

Вид сировини	Витрати сировини на 1 кг продукції		Запас сировини (кг)
	продукція I	продукція II	
A	0,3	0,2	220
B	0,9	1,1	195
C	0,4	0,1	240
D	0	0,3	205
Прибуток від виробництва одиниці продукції	2,5	3,5	

Визначити план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

1.7. Цех напівфабрикатів виробляє два види продукції і при цьому використовує чотири види сировини у кількості, вказаній нижче в таблиці.

Вид сировини	Витрати сировини на 1 кг продукції		Запас сировини (кг.)
	продукція I	продукція II	
A	3	2	2200
B	9	11	1950
C	4	1	2400
D	0	3	2050

Прибуток від виробництва одиниці продукції	25	35	

1.8. У таблиці наведені ресурси торгового підприємства на квартал і нормативи їх витрат в тис. гривень товарообігу на овочеві і плодово-ягідні консерви.

Показники	Нормативи витрат		Фонди показник ів
	овочеві	плодово-ягідні	
Витрати праці торгівельних працівників (люд.-год.)	7	9	1700
Площа торгівельних залів (кв.м.)	0,4	0,3	75
Витрати обігу (грн.)	5	4	960
Прибуток (грн.)	80	90	

Скласти квартальний план товарообігу, який забезпечить найбільший прибуток.

1.9. У міні-кафе реалізуються бутерброди 3 видів I, II, III. Їх підготовка і реалізація вимагаютьвикористання 4 видів сировини - A,B,C,D, норми витрат якої наведені у таблиці:

Види сировини	Норми витрат ресурсів на 1 партію бутербродів			Запас сировини
	I	II	III	
A	3	2	3	48
B	2	4	3	54
C	4	3	2	50
D	3	2	1	40
Прибуток (грн)	8	7	5	

Визначити план продажу бутербродів, який забезпечить максимум прибутку від їх реалізації.

Друга група задач

Задача 1

Підприємство випускає три виду продукції А, Б і С (табл. 5.1) Для виробництва цієї продукції потрібні такі ресурси, як матеріали, праця робочих та ІТР. Для прийняття рішення оптимального випуску продукції, треба: визначити параметри оптимізації задачі та скласти якісну та математичну моделі задачі на основі операційної методології. Виконати формалізацію задачі, описати методи її рішення і методику дослідження отриманої моделі.

Таблиця 1

Вхідні данні

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
1	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	1	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	295
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	95	60	300	
2	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	1	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,35	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	7	280
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	95	65	300	
3	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,45	75
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	6	275

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	290	
4	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	110
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	0,4	0,4	70
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	2	5	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	290	
5	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	0,45	0,4	80
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	6	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	65	270	
6	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	2	0,5	85
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	60	265	
7	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	1	2	95

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	2	7	260
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	110	265	
8	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	1	2	95
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	7	310
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	90	125	265	
9	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	105
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	0,5	120
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	3	6	310
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	125	75	
10	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	1	1	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	5	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	120	170	

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
11	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	2	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	4	5	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	185	125	170	
12	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	5	4	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	3	3	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	4	5	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	180	135	175	
13	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	5	4	130
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	7	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	4	5	195
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	190	140	180	
14	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	5	4	140
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	7	155
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	7	3	205

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	200	150	210	
15	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	3	145
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	6	7	160
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	7	6	210
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	205	155	215	
16	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	4	150
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	165
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	4	7	6	215
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	225	160	220	
17	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	4	7	155
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	170
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	4	5	6	230
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	215	165	210	
18	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	2	1	90

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	115
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	1	2	300
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	270	120	260	
19	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	2	2	100
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	3	125
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	4	2	250
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	260	180	270	
20	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	1	2	2	105
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	1	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	1	2	265
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	195	260	
21	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	2	2	110
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	2	3	1	145
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	1	1	2	245
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	245	275	255	

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
22	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	3	3	2	115
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	2	3	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	1	180
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	285	270	
23	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	1	2	120
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	1	2	3	130
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	1	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	245	265	275	
24	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	1	125
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	135
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	1	3	195
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	275	285	
25	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	4	135
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	140
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	200

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	265	280	285	
26	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	5	4	4	155
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	5	6	165
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	210
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	275	290	280	
27	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	2	4	4	165
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	2	2	170
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	3	3	3	205
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	255	260	245	
28	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	5	4	4	160
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	4	5	175
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	2	3	3	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	275	250	260	
29	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	6	4	6	170

Варіант	Види витрат	Продукція			Обмеження за виробничими потужностями
		А	Б	С	
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	4	6	5	180
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	5	3	190
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	240	250	255	
30	Витрати праці робочих на 1 тис. шт., годин	4	7	4	160
	Витрати матеріалів на 1 тис. шт., годин	7	3	5	175
	Витрати праці ІТР на 1 тис. шт., годин	5	5	3	185
	Прибуток на одну тисячу штук кожного виду продукції, тис. грн.	200	210	195	

6. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ№2.

Теорія ігор

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета завдання. Навчитися приймати оптимальні рішення в умовах, коли існують декілька альтернативних стратегій дій економіста.

Теоретичні положення.

Звичайно теорію гри визначають як розділ математики для вивчення конфліктних ситуацій. Це означає, що можна виробити оптимальні правила поведінки кожної сторони, що бере участь у рішенні конфліктної ситуації.

Гра – спрощена формалізована модель реальної конфліктної ситуації. Математично формалізація означає, що вироблені певні правила дії сторін в процесі гри: варіанти дії сторін; вихід гри при даному варіанті дії; обсяг інформації кожної сторони про поведінку всіх інших сторін. Виграш або програш сторін оцінюється чисельно. Гравець - це одна зі сторін в ігровій ситуації. Стратегія гравця – це його правила дії в кожній з можливих ситуацій гри.

Платіжна матриця (матриця ефективності, матриця гри) включає всі значення виграшів (в кінцевій грі). Нехай гравець 1 має m стратегій A_i гравець 2 - n стратегій B_j ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$). Гра може бути названа грою m/n. Подамо матрицю ефективності гри двох осіб.

Гравець 2	B_1	B_2	……..	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	……..	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	……..	a_{2n}	α_2
………	………	….	……..	………	………
A_m	a_{m1}	a_{m2}	……..	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	……..	β_n	

У даній матриці елементи a_{ij} - значення виграшів гравця 1 - можуть означати й математичне сподівання виграшу (середнє значення), якщо виграш є випадковою величиною. Величини α_i, $i = \overline{1,m}$, и β_j, $j= \overline{1,n}$, - відповідно мінімальні значення елементів a_i по рядках і максимальні - по стовпцях.

Ігри діляться на кінцеві й нескінченні. У кінцевій грі кожний з гравців має кінцеве число можливих стратегій. Якщо хоч би один з гравців має нескінченне число можливих стратегій, гра є нескінченною.

Ще ігри діляться на кооперативні, коаліційні і безкоаліційні. Якщо гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції, то така гра відноситься до безкоаліційних; якщо гравці можуть вступати в угоди, створювати коаліції - коаліційних. Кооперативна гра – це гра, в якій заздалегідь визначені коаліції.

Ігри можна розділити на одноходові та багатоходові. Одноходові ігри закінчуються після одного ходу кожного гравця. Так, в матричній грі після одного ходу кожного з гравців відбувається розподіл виграшів.

Розглянемо антагоністичну гру, представлену матрицею виграшів $m{\times}n$, де число рядків $i = \overline{1,m}$, а число стовпців $j = \overline{1,n}$. Застосуємо принцип отримання максимального гарантованого результату при найгірших умовах. Гравець 1 прагне прийняти таку стратегію, яка повинна забезпечити максимальний програш гравця 2. Відповідно гравець 2 прагне прийняти стратегію, що забезпечує мінімальний виграш гравця 1. В цих умовах, якщо

$$\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_i = v. \qquad (1)$$

гра називається грою з «сідловою» точкою і гравці мають додержуватися стратегій, які її забезпечують, і називаються «чистими», а v. – називавється ціною гри.

Якщо в матричній грі відсутня сідлова точка, то знаходять «змішану» стратегію гравців, тобто набір застосування його чистих стратегій при багаторазовому повторенні гри в одних і тих же умовах із заданими ймовірностями. Для гравця 1 змішана стратегія полягає в застосуванні чистих стратегій $A_1, A_2, ..., A_m$ з відповідними ймовірностями (частотою) $p_1, p_2 .... p_m$,

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2, & \dots, & A_m \\ p_1 & p_2, & \dots, & p_m \end{pmatrix}, \qquad \text{де } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0 \tag{2}$$

Для гравця 2

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2, & \dots, & B_n \\ q_1 & q_2, & \dots, & q_n \end{pmatrix}, \qquad \text{де } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0\,; \tag{3}$$

q_j - імовірність застосування чистої стратегії B_j.

Чисті стратегії гравця є єдино можливими неспільними подіями. У матричній грі, знаючи матрицю A (вона відноситься й до гравця 1, і до гравця 2), можна визначити при заданих векторах $\overline{p}$ і $\overline{q}$, середній виграш (математичне сподівання ефекту) гравця 1

$$M(A, \overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j\,, \tag{4}$$

де $\overline{p}$ і $\overline{q}$, - вектори; p_i і q_j - компоненти векторів.

Потрібно зазначити, що при виборі оптимальних стратегій гравцеві 1 завжди буде гарантований середній виграш, не менший, ніж ціна гри, при будь-якій фіксованій стратегії гравця 2 (і, навпаки, для гравця 2). Активними стратегіями гравців 1 і 2 називають стратегії, що входять до складу оптимальних змішаних стратегій відповідних гравців зі ймовірностями, відмінними від нуля. Значить, до складу оптимальних змішаних стратегій гравців можуть входити не всі апріорі задані їх стратегії.

Приклади. Приклад 1. Визначити верхню та нижню ціни при заданій матриці гри і указати максимінну і мінімаксну стратегії. Представимо матрицю гри з позначеннями стратегій, A_j, B_i;

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	1	3	1
A_2	4	5	6	4
β_j	4	5	6	

Визначимо нижню ціну гри: $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 4$; $\alpha = 4$ (див. стовпець α_i,).

Визначимо верхню ціну гри: $\beta_1 = 4$; $\beta_2 = 5$; $\beta_3 = 6$; $\beta = 4$ (див. рядок β_j).

Таким чином, $\alpha = \beta = 4$, тобто $\max_i \min_j \alpha_{ij} = \min_j \max_i \alpha_i = 4$.

Значить, $\alpha = \beta = v = 4$ - чиста ціна гри при стратегіях A_2 і B_1. Отже, маємо гру з сідловою точкою.

Приклад 2. Дана матриця гри $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти її змішані стратегії.

Побудуємо цільову функцію згідно (5.44)

$$M(A, \overline{p}, \overline{q}) = 25 p_1 q_1 + p_1 q_2 + 3 p_2 q_1 + 5 p_2 q_2 + p_3 q_1 + 9 p_3 q_2 \to \max,$$

та враховуючи обмеження (5.42) - (5.43), знайдемо оптимальні значення ймовірностей застосування різних стратегій, застосувавши функцію Solwer. Рішенням цієї гри є те, що всі ймовірності дорівнюють нулю, окрім $p_1 = 1$ $q_1 = 1$. Отже ця гра повинна виконуватися у чистих стратегіях.

Оптимальні стратегії у випадку, коли учасники гри є співробітниками, знаходяться методами біматричної гри. По аналогії з матричними іграми двох осіб в біматричній грі кожен з гравців вибирає свою стратегію, робить один хід, після чого відбувається розподіл виграшів. Відмінність полягає в тому, що биматричная гра визначається не одній, а двома матрицями виграшів. Кожен з гравців має свою матрицю, і виграш один з них зовсім не означає програш іншого.

Хай матриці виграшів першого і другого гравців мають відповідно вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обидві матриці можуть бути представлені однією матрицею пар елементів

A і *B*, так званою біматрицею

$$C = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \cdots & (a_{1j}, b_{1j}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{i1}, b_{i1}) & (a_{i2}, b_{i2}) & \cdots & (a_{ij}, b_{ij}) & \cdots & (a_{in}, b_{in}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & \cdots & (a_{mj}, b_{mj}) & \cdots & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}.$$

При виборі першим гравцем i-го рядка, а другим гравцем j-го стовпця виграш кожного з них складе пару (a_{ij}, b_{ij}).

Природно, інтерес представляють ігри, в яких матриці *A* і *B* не збігаються і елементами однієї матриці не є монотонні перетворення іншої. Якщо ця умова не дотримана, то деякому максимальному елементу a_{kl} матриці *A* відповідає максимальний елемент b_{kl} матриці *B*. Це означає, що існує пара чистих стратегій (k, l) при використанні яких обох гравців мають максимальний виграш і конфлікт відсутній. У решті випадків досягти максимуму свого виграшу відразу обидва гравці не можуть. Необхідно ввести деяку ознаку компромісної оптимальності, якою є ситуація рівноваги. Під ситуацією маються на увазі конкретні використані змішані стратегії x, y.

Ситуація рівноваги для біматричної гри представляється парою таких змішаних стратегій x, y при яких дотримуються нерівності:

$$M_1^i \le M_1,\ i = \overline{1,m}; \qquad M_2^j \le M_2,\ j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

де M_1^i – математичне сподівання виграшу першого гравця при застосуванні ним тільки i-ї стратегії; M_2^j – математичне сподівання виграшу другого гравця при застосуванні j-ї чистій стратегії.

Змістовний сенс нерівностей (5) полягає в тому, що застосування чистих стратегій будь-яким з гравців дає не більший ефект, чим застосування змішаних стратегій (x, y) обома гравцями.

Оскільки (x, y) є розподілами вірогідності використання чистих стратегій гравцями, то очевидно, що

$$M_1^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j,\ i = \overline{1,m};\quad M_2^j = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i,\ j = \overline{1,n};$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j;\quad M_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j. \tag{6}$$

Підставивши в нерівності (5.45) значення математичних сподівань з формул (5.46), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,\ i = \overline{1,m}; \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j,\ j = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Відмітимо, що (x,y) є по фізичній суті вірогідністю вибору чистих стратегій, а можливі результати вибору стратегій кожним з гравців складають повну групу несумісних подій. Тому значення елементів (x,y) повинні задовольняти умовам

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i = 1;\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}; \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1;\ y_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{9}$$

Визначення ситуацій рівноваги здійснюється шляхом сумісного вирішення системи нерівностей і рівнянь (5.47) – (5.49).

Приклад. Нехай існують матриці виграшів кооперативної гри

A =

12	45	65
45	4	48
12	47	14

B =

122	752	124
456	485	459
478	258	254

Знайти оптимальні стратегії для обох гравців.

На рис. 5.6 представлено повний хід рішення цієї задачі, в якій було застосовано метод згортки часткових критеріїв (5.30)-(5.32). Жовтим виділено оптимальні частоти застосування стратегій для кожного гравця. При цьому виграш першого гравця складе 27, а другого – 459. Оптимальним стратегіями є $X = \{0; 0{,}88; 0{,}12\}$, $Y = \{0{,}6; 0{,}4; 0\}$.

Нерідко економічна ситуація є унікальною, і рішення в умовах невизначеності повинно прийматися одноразово. Це породжує необхідність розвитку методів моделювання прийняття рішень в умовах невизначеності і ризику. Традиційно наступним етапом такого розвитку є **гра з природою**. Формальне вивчення гри з природою, так само як і стратегічних, повинно починатися з побудови платіжної матриці.

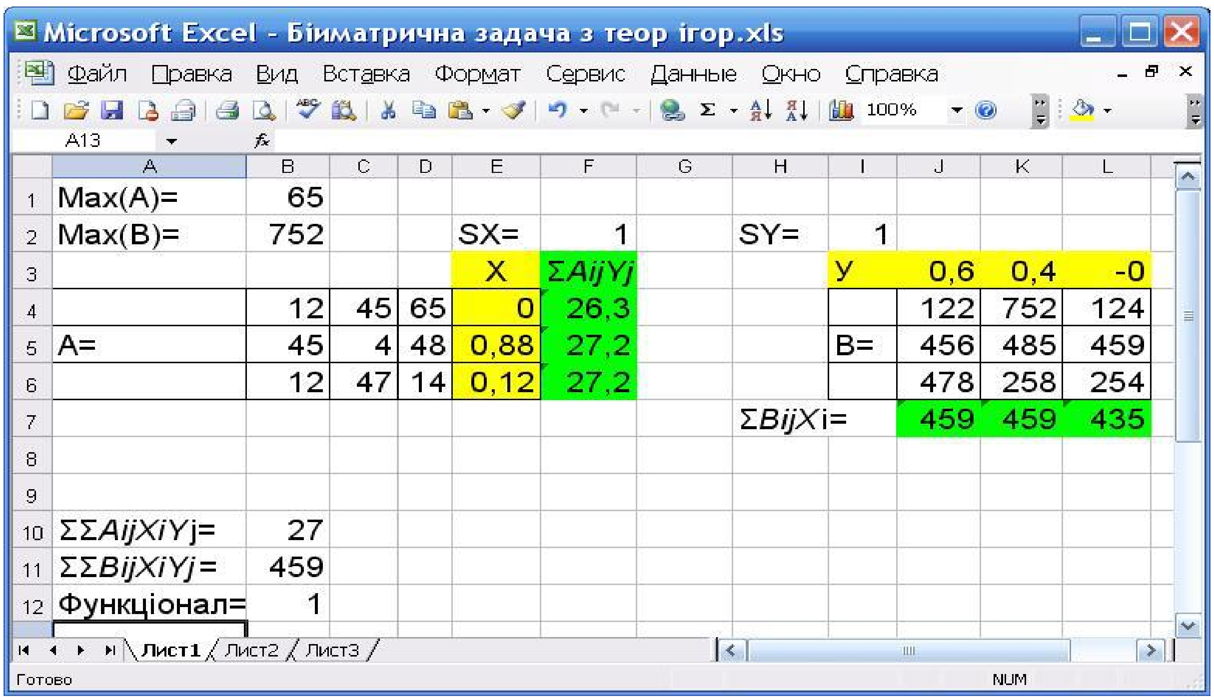


Рис. 1. Рішення біматричної задачі із застосуванням функції «Пошук рішення»

Помітна особливість гри з природою полягає в тому, що в ній свідомо діє тільки один з учасників, у більшості випадків званий гравцем 1. Гравець 2 (природа) свідомо проти гравця 1 не діє, а виступає як така, що не має конкретної мети і партнер по грі, що випадковим чином вибирає чергові «ходи». Тому термін «природа» характеризує деяку об'єктивну дійсність, яку не треба розуміти буквально, хоч цілком можуть зустрітися ситуації, в яких «гравцем» 2 дійсно може бути природа (наприклад, обставини, пов'язані з погодними умовами або з природними стихійними силами).

На перший погляд відсутність обдуманої протидії спрощує гравцеві задачу вибору рішення. Однак, хоч ОУР ніхто не заважає, їй важче обґрунтувати свій вибір, оскільки в цьому випадку гарантований результат не відомий.

Нехай гравець 1 має m можливих стратегій: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а у природи є n можливих станів (стратегій): $П_1, П_2, \ldots, П_n$, Тоді умови гри з природою задаються матрицею A виграшів гравця 1.

$$A=\left(\begin{array}{c|cccc} & П_1 & П_2 & \ldots & П_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right)$$

Платить, звичайно, не природа, а деяка третя сторона (або сукупність сторін, що впливають на прийняття рішень гравцем 1 і об'єднаних у поняття «природа»).

Можливий ще й інший спосіб завдання матриці гри з природою: не у вигляді матриці виграшів, а у вигляді так званої матриці ризиків $R = ||r_{ij}||_{m,n}$ або матриці упущених можливостей. Величина ризику – це розмір плати за відсутність інформації про стан середовища. Матриця R може бути побудована безпосередньо з умов задачі або на основі матриці виграшів A. Ризиком r_{ij} гравця при використанні ним стратегії A_i і при стані середовища $П_j$ будемо називати різницю між виграшем, який гравець отримав би, якби він знав, що станом середовища буде $Пj$, і виграшем, який гравець отримає, не маючи цієї інформації. Тобто,

$$R_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}. \tag{5.50}$$

Знаючи стан природи (стратегію) $П_j$, гравець вибирає ту стратегію, при якій його виграш максимальний, тобто $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, *де* $\beta_j = \max\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$ при заданому j.

Прийняття рішень, якщо відомі ймовірності стану природи. p_j, вибір оптимальної стратегії активного гравця визначається як $\alpha = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$,

(5.51)

Тобто, знаходиться середнє по рядку платіжної матриці гри і обирається та стратегія, яка дає найбільше середнє значення.

В деяких випадках імовірності настання певних станів природи подаються обумовлені, що точність визначення цих імовірностей менше 100%. Частіше, для кожного стану природи $П_j$ вказується своя точність розрахунку ймовірності його стану t_j, яка як і ймовірність змінюється в діапазоні від 0 до 1 (від о% до 100%). У цьому випадку , вибір оптимальної стратегії активного гравця визначається із залученням матриці ризиків r_{ii} $\alpha = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j t_j - \sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j (1-t_j) \right)$,(5.52)

Тобто, при визначенні середнього, його складові коректуються на величину точності визначення його ймовірності. В той же час визначається середній ризик, скоректований на можливий рівень не точності визначення станів природи. Відповідні значення середнього виграшу і середнього ризику віднімаються по рядках, а потім обирається та стратегія, яка дає найбільший результат.

Прийняття рішень в умовах повної невизначеності, пов'язане з відсутністю інформації щодо ймовірності станів середовища (природи), називають «безнадійною» або «поганою». У таких випадках для визначення найкращих рішень використовуються наступні критерії.

Критерії максимакса. З його допомогою визначається стратегія, яка максимізує максимальні виграші для кожного стану природи. Це критерій крайнього оптимізму. Найкращим признається рішення, при якому досягається максимальний виграш, рівний $M = \max\limits_{1 \le i \le m} \max\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$. Потрібно зазначити, що ситуації, що вимагають застосування такого критерію, в економіці загалом нерідкі, і користуються ними не тільки оптимісти, але й гравці, поставлені в безвихідне становище, коли вони вимушені керуватися принципом «або пан, або пропав».

Максимінний критерій Вальда. З позицій даного критерію природа розглядається як агресивно настроєний і свідомо діючий противник типу тих, які протидіють у стратегічній грі. Вибирається рішення, для якого досягається значення $W = \max\limits_{1 \le i \le m} \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}$. Це перестраховочна позиція крайнього песимізму, розрахована на гірший випадок. Така стратегія прийнятна, наприклад, коли гравець не так зацікавлений у великому успіху, але хоче себе застрахувати від несподіваних програшів. Вибір такої стратегії визначається відношенням гравця до ризику.

Критерій мінімаксного ризику Севіджа. Вибір стратегії аналогічний вибору стратегії за принципом Вальда з тією відмінністю, що гравець керується не матрицею виграшів A, а матрицею ризиків R): $S = \min\limits_{1 \le i \le m} \max\limits_{1 \le j \le n} r_{ij}$.

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца. Цей критерій при виборі рішення рекомендує керуватися деяким середнім результатом, що характеризує стан між крайнім песимізмом і нестримним оптимізмом. Згідно з цим критерієм стратегія в матриці A вибирається у відповідності зі значенням $H_A = \max\limits_{1 \le i \le m} \{p \min\limits_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-p) \max\limits_{1 \le j \le n} a_{ij}\}$, де p - коефіцієнт песимізму $(0 \le p \le 1)$. При p=0 критерій Гурвіца співпадає з максимаксним критерієм, а при $p = 1$ - з критерієм Вальда.

Коли за прийнятим критерієм рекомендується до використання декілька стратегій, вибір між ними робиться за додатковим критерієм, наприклад в розрахунок можуть прийматися середні квадратичні відхилення від середніх виграшів при кожній стратегії. Вибір може залежати від схильності до ризику ОУР.

Приклади.

Приклад 1. В умовах повної невизначеності знайти найкращу стратегію за наведеною нижче матрицею. Наступна матриця – ризиків, розрахована за (5.50)

$$\begin{pmatrix} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \\ A_1 & 20 & 30 & 15 & 15 \\ A_2 & 75 & 20 & 35 & 20 \\ A_3 & 25 & 80 & 25 & 25 \\ A_4 & 85 & 5 & 45 & 5 \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} 65 & 50 & 30 & 10 \\ 10 & 60 & 10 & 5 \\ 60 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Для гравця 1 кращими є стратегії:

- за критерієм Вальда A_3;
- за критерієм Севіджа A_2 і A_3;
- за критерієм Гурвіца (при p= 0,6) - A_3;
- за критерієм максимакса A_4

Оскільки стратегія A_3 фігурує як оптимальна за трьома критеріями вибору з чотирьох перевірених, міру її надійності можна визнати досить високою для того, щоб рекомендувати цю стратегію до практичного застосування.

Приклад 2. Директор фірми повинен вирішити, скільки ящиків товару потрібно виробляти протягом місяця. Імовірності того, що попит на товар протягом місяця буде 6, 7, 8 або 9 ящиків, становить відповідно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1.

Витрати на виробництво одного ящика є 45 грн. Фірма продає кожний ящик по ціні 95 грн. Якщо ящик з товаром не продається протягом місяця, то він псується й фірма не отримує прибутку. Скільки ящиків потрібно виробляти протягом місяця?

Користуючись початковими даними, будуємо матрицю гри. Стратегіями гравця 1 (тобто, фірми) є різні показники числа ящиків, які йому, можливо, потрібно виробляти. Станами природи виступають величини попиту на аналогічне число ящиків. Обчислимо, наприклад, показник прибутку, який отримає виробник, якщо він зробить 8 ящиків, а попит буде тільки на 7. У результаті отримаємо наступну платіжну матрицю в грі з природою (див. таблицю). Як бачимо, найбільший середній очікуваний прибуток є 352,5 грн. Він відповідає виробництву 8 ящиків.

На практиці частіше за все в подібних випадках рішення приймаються виходячи з критерію максимізації середнього очікуваного прибутку або мінімізації очікуваних витрат. Обираючи такий підхід, можна зупинитися на рекомендації проводити 8 ящиків, і для більшості ОУР рекомендація була б обґрунтованою. Саме так поступаємо ми, коли розглядаємо різні прикладні задачі прийняття рішень у грі з природою.

Попит на ящики / Виробництво ящиків	6 (0,1)*	7 (0,3)	8 (0,5)	9 (0,1)	Середній очікуваний прибуток
6	300	300	300	300	300
7	255	350	350	350	340,5
8	210	305	400	400	352,5
9	165	260	355	450	317

* У дужках приведена ймовірність попиту на ящики.

Завдання 1

Підприємство випускає продукцію (продукція може бути швидко псуватися), яку можна: зразу відправити споживачу (стратегія A_1); відправити на склад для зберігання (стратегія A_2); підвергнути додатковій обробці для тривалого зберігання (стратегія A_3). Варіанти завдань обирати за табл.. 5.3

Споживач може купувати продукцію: негайно (стратегія B_1); у термін невеликого часу (стратегія B_2); після тривалого періоду часу (стратегія B_3).

У випадку стратегій A_2 та A_3, підприємство несе додаткові витрати на зберігання та обробку продукції, які не потрібні для A_1. Але, при вибору стратегії A_2, слід взяти до уваги можливі збитки із-за псування продукції.

Визначити оптимальні пропорції продукції для застосовування стратегій A_1, A_2 та A_3. Рекомендовано використовувати мінімаксний критерій (гарантований середній рівень збитку) при матриці витрат.

Таблиця 5.3

Вхідні данні

Варіант № 1				Варіант № 2				Варіант № 3			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	8	7	11	A_1	6	8	9	A_1	8	10	11
A_2	11	10	8	A_2	7	11	12	A_2	12	9	14
A_3	5	4	3	A_3	12	9	10	A_3	7	8	9
Варіант № 4				Варіант № 5				Варіант № 6			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	9	11	A_1	11	9	10	A_1	10	9	11
A_2	13	12	8	A_2	14	13	8	A_2	13	14	15
A_3	9	7	6	A_3	10	8	7	A_3	9	8	10
Варіант № 7				Варіант № 8				Варіант № 9			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	8	11	A_1	11	10	7	A_1	11	7	12
A_2	12	14	15	A_2	14	12	13	A_2	13	14	15

A_3	8	7	9	A_3	10	9	6	A_3	10	6	11
Варіант № 10				Варіант № 11				Варіант № 12			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	11	8	A_1	11	9	12	A_1	10	9	11
A_2	13	12	14	A_2	12	13	14	A_2	11	13	15
A_3	11	9	7	A_3	9	8	10	A_3	9	7	10
Варіант № 13				Варіант № 14				Варіант № 15			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	9	12	A_1	10	9	8	A_1	11	9	8
A_2	12	13	15	A_2	14	12	13	A_2	16	13	15
A_3	9	8	10	A_3	9	8	7	A_3	10	8	7
Варіант № 16				Варіант № 17				Варіант № 18			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	10	7	12	A_1	12	8	14	A_1	12	11	10
A_2	14	15	16	A_2	15	16	17	A_2	16	14	15
A_3	9	6	11	A_3	10	7	12	A_3	11	10	9
Варіант № 19				Варіант № 20				Варіант № 21			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	12	11	13	A_1	13	12	14	A_1	12	10	14
A_2	14	15	16	A_2	14	15	16	A_2	13	14	15
A_3	11	10	11	A_3	11	10	13	A_3	10	9	12
Варіант № 22				Варіант № 23				Варіант № 24			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	13	11	14	A_1	14	13	12	A_1	13	11	14
A_2	14	16	17	A_2	18	14	17	A_2	15	17	18
A_3	11	10	12	A_3	12	11	10	A_3	12	10	13
Варіант № 25				Варіант № 26				Варіант № 27			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	14	12	15	A_1	14	13	15	A_1	16	15	14

A_2	15	17	18	A_2	15	18	19	A_2	18	16	19
A_3	11	10	13	A_3	11	10	12	A_3	15	13	12
Варіант № 28				Варіант № 29				Варіант № 30			
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	15	13	16	A_1	15	14	16	A_1	17	16	14
A_2	17	19	20	A_2	16	19	20	A_2	20	17	19
A_3	14	12	15	A_3	13	12	14	A_3	15	14	12

Завдання 2

Підприємство може випускати три виду продукції (A_1, A_2 та A_3), при цьому отримує прибуток, який залежить від попиту. Попит може бути в одному з чотирьох станів (B_1, B_2, B_3 або B_4). Дана матриця (табл.. 5.4), її елементи a_{ij} характеризують прибуток, який отримає підприємство при випуску ***i***-ої продукції з ***j***-м змістом попиту.

Розробити математичну модель для визначення оптимальних пропорцій випуску продукції, які гарантують середню величину прибутку при різноманітному стані попиту. Зробіть висновки щодо прийняття оптимального рішення.

Таблиця 5.4

Вхідні данні

Варіант № 1					Варіант № 2				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	7	9	A_1	4	6	7	10
A_2	10	11	5	3	A_2	11	13	6	4
A_3	8	9	5	4	A_3	10	11	7	6
Варіант № 3					Варіант № 4				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4

A_1	3	8	7	9	A_1	4	6	7	8
A_2	9	12	6	2	A_2	9	10	6	3
A_3	8	9	5	4	A_3	7	9	5	4
Варіант № 5					Варіант № 6				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	5	7	9	A_1	7	8	7	10
A_2	11	10	8	3	A_2	11	10	9	3
A_3	10	9	6	5	A_3	10	9	5	5
Варіант № 7					Варіант № 8				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	7	9	8	A_1	8	7	10	9
A_2	11	10	6	4	A_2	11	10	4	5
A_3	10	9	5	6	A_3	12	11	5	6
Варіант № 9					Варіант № 10				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	8	9	10	A_1	7	8	9	10
A_2	8	4	5	8	A_2	6	5	7	8
A_3	9	5	6	9	A_3	9	6	6	9
Варіант № 11					Варіант № 12				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	7	8	10	A_1	9	7	10	11
A_2	7	5	7	8	A_2	5	6	8	9
A_3	8	4	6	9	A_3	8	10	9	10
Варіант № 13					Варіант № 14				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	5	8	11	A_1	7	6	9	11
A_2	6	8	7	9	A_2	6	9	7	9
A_3	8	10	9	10	A_3	9	8	8	10
Варіант № 15					Варіант № 16				

	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	6	11	12	A_1	10	6	11	12
A_2	8	10	9	11	A_2	8	9	10	13
A_3	7	9	8	10	A_3	11	11	9	11
Варіант № 17					Варіант № 18				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	10	11	12	A_1	11	7	10	11
A_2	10	9	12	13	A_2	10	8	12	13
A_3	11	8	9	11	A_3	7	10	9	10
Варіант № 19					Варіант № 20				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	11	9	11	12	A_1	11	9	12	14
A_2	10	8	9	13	A_2	10	12	9	13
A_3	7	11	10	11	A_3	8	11	13	15
Варіант № 21					Варіант № 22				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	14	13	12	14	A_1	14	11	13	14
A_2	9	12	14	17	A_2	11	12	15	17
A_3	8	14	11	15	A_3	15	14	11	15
Варіант № 23					Варіант № 24				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	11	13	14	A_1	10	11	12	14
A_2	11	9	7	10	A_2	11	9	8	10
A_3	15	14	12	15	A_3	12	7	12	15
Варіант № 25					Варіант № 26				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	11	12	10	A_1	12	11	12	10
A_2	11	9	8	7	A_2	11	10	8	9
A_3	9	7	12	11	A_3	10	8	13	11

Варіант № 27					Варіант № 28				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	11	10	8	A_1	12	11	10	9
A_2	11	7	8	9	A_2	11	8	7	6
A_3	10	8	11	11	A_3	10	9	11	10
Варіант № 29					Варіант № 30				
	B_1	B_2	B_3	B_4		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	12	10	11	8	A_1	12	10	11	9
A_2	11	9	7	6	A_2	13	11	8	6
A_3	10	7	8	11	A_3	11	9	10	11

Завдання 3

Узявши дані сусіднього завдання, вирішити обидві платіжних матриці як кооперативну гру.

7. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №3.

Транспортна задача

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета завдання. Навчитися використовувати транспортну задачу для визначення економічн6их маршрутів та найкращого розподілу працівників.

Теоретичні положення.

Хай є ряд пунктів споживання і підприємств-постачальників деякої продукції, де:

A_i – ресурс i-го постачальника (запас продукції або план відвантаження з поточного виробництва).

B_j – потреби в тій же продукції в пунктах j.

C_{ij} – відстань або вартості перевезення з i в j.

Вимагається знайти такі розміри поставок від кожного постачальника кожному споживачу X_{ij} (змінні задачі), при яких загальна сума витрат або загальний пробіг будуть мінімальними.

Розрізняють наступні різновиди транспортних задач (рис. 5.4)

Система обмежень закритої задачі: передбачає поставку кожному споживачу кількість продукції, рівного потребі в ній (5.7) і вивіз продукції від кожного постачальника в кількості, рівній її ресурсу (5.8.)

$\Sigma X_{ij} = B_i$, (j=1,2, … n – кількість постачальників), (1)

$\Sigma X_{ij} = A_i$, (i= 1,2, … m – кількість споживачів); (2)

У відкритій задачі з перевищенням ресурсів можливий вивіз менше наявності $\Sigma X_{ij} < A_i$, (3)

У відкритій задачі з перевищенням потреб можливе постачання менше наявності $\Sigma X_{ij} < \Sigma B_j$, (4)

Критерієм оптимальності рішення є мінімум загальних витрат по перевезенню або з пробігу в тонно-кілометрах (вагоно-кілометрах) по всіх планованих відправленнях. Якщо вартість перевезення (відстань) від i до j - позначити як C_{ij} те цільова функція визначиться таким чином

$$\Sigma \Sigma C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min, \qquad (5)$$

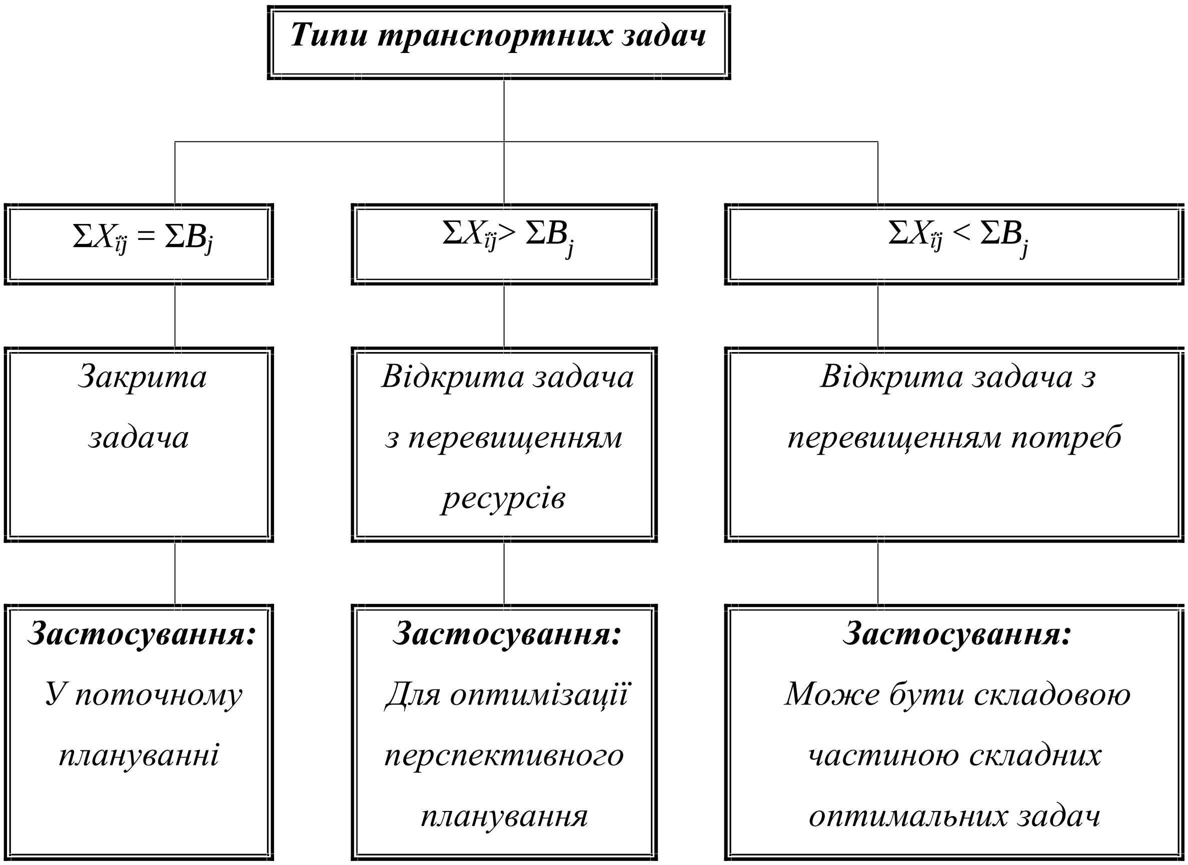


Рис. 1. Різновиди транспортних задач

Мережна транспортна задача:

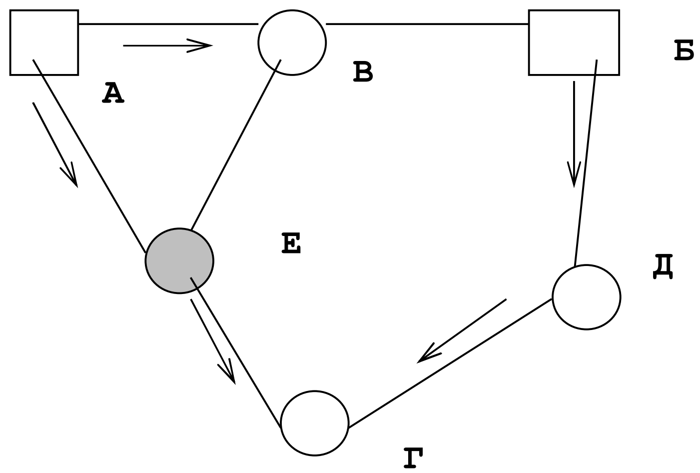


Рис. 2. Схема транспортної мережі:
+10 Б - Пункти і розміри відправлення

-8 Д - Пункти і розміри прибуття
— - лінії з'єднання – «дуги» або «ланки»
← - стрілка – потік вантажу
$X_{AB} = 8$ - розмір вантажу

Оптимальне планування перевезень може бути проведене безпосередньо на схемі мережі шляхів сполучення (рис. 5.5). Схема складається з дуг і вузлів (або вершин). Вершинами є пункти або (центри агрегації) вантаження і вивантаження, а також всі реальні вузлові пункти мережі. Вершини без вантаження і вивантаження даного вантажу є транзитними. Кожну ділянку мережі між двома сусідніми вершинами звичайно розглядають як дві дуги протилежного напряму з рухом в одну сторону по кожній дузі.

Кожна дуга характеризується показником відстані (або вартості) перевезення одиниці вантажу або довжині дуги. При рішенні задач за критерієм вартості довжина прямої і зворотної дуг звичайно різна (оскільки витрати перевезення по ділянці “туди і назад”не співпадають).

Змінними мережної транспортної задачі є потоки вантажу по кожній дузі. Потік може включати багато відправок, наприклад, потік по дузі Б-Д включає поставки з Б в Д – 8 одиниць вантажу, а з Б в Г – 7 одиниць вантажу.

До вирішення задачі, як правило, невідомо, в яку сторону перевозитиметься вантаж по ділянці в оптимальному варіанті. Тому в число змінних включаються потоки в обох напрямах, а загальне число змінних приймається рівним подвоєному числу ділянок мережі. (При значному числі постачальників і одержувачів число змінних при мережній постановці значне менше ніж при матричній, що полегшує рішення задачі, Наприклад, за наявності на мережі 600 ділянок, 50 пунктів відправлення і 200 пунктів призначення, число змінних при мережній постановці складе 1200 (600*2), а при матричній постановці воно буде набагато більше (200*50=10000 змінних).

Обов'язковою умовою мережної задачі є вимога балансування прибуття і відправлення вантажу в кожній вершині мережі: прийом вантажу зі всіх напрямів плюс власне вантаження рівні здачі на всі напрями власне вивантаження

$$\Sigma X_{ks} – \Sigma X_{kr} = R_k , \qquad (6)$$

де K – довільна вершина; R_k – завантаження (+) або вивантаження (-) (R_k = 0 для транзиту) вершини K; X_{ks} – потоки від K до всіх сусідніх вершин S; X_{kr} – потоки до K від сполучених вершин r;

Цільова функція закритої мережної задачі має вигляд

$$\Sigma\, \Sigma\, C_{rs}\, X_{rs} \rightarrow \min. \qquad (7)$$

Підсумовування виконується по всіх дугах мережі.

Описана модель мережної задачі не враховує пропускної спроможності ділянок мережі – для цього вводиться додаткове обмеження

$$X_{rs} < d_{rs} , \qquad (8)$$

де d_{rs} – пропускна спроможність ділянки мережі r-s в напрямі від r до s.

З урахуванням (5.12) - (5.14) одержуємо мережну транспортну задачу з обмеженням пропускної спроможності в простому вигляді (для перевезення одного вантажу).

Мережна і матрична моделі в більшості випадків взаємозамінні.

В деяких випадках обирається інший, ніж мінімум витрат на перевезення, критерій оптимальності Вибір критерію залежить від: характеру проблеми, наявної інформації і необхідної точності знаходження оптимуму.

Прикладами локального критерію оптимальності транспортної задачі можуть служити:

а) критерій мінімуму сумарного пробігу (придатний тільки для вирішення закритих транспортних задач в межах одного виду транспорту).

б) при оптимізації перевезень в межах року звичним вартісним критерієм є сума залежних приведених витрат $E_{зав} + E_{пер} + E_{п} + (K_{пс} + C_{гр})$, де $E_{зав}$ – залежні від руху експлуатаційні витрати; $K_{пс}$ – капітальні вкладення на пересувний склад; $C_{гр}$ – вартість вантажів, що знаходяться в процесі перевезення; $E_{пер}$ – витрати по перевалюваннях; $E_{п}$ – вартість поставки вантажів.

в) При складанні оптимальних схем перевезень на перспективу можливе посилення пропускної спроможності ліній залежно від розміщення на них оптимальних вантажопотоків. Тому в критерії оптимальності враховується $K_{пост}$ – витрати на необхідний розвиток пропускної спроможності по постійних пристроях; $E_{нез}$ – незалежні експлуатаційні витрати.

$$E_{зав} + E_{пер} + E_{нез} + E_{п} + (K_{пс} + K_{пост} + C_{гр}),$$

г) в деяких випадках при рішення відкритих транспортних задач допускається використовування як критерій – сума витрат виробництва і тарифної платні за перевезення.

д) у окремих задачах по оптимізації термінових перевезень як критерій виступає час: тонно-часи (вагони-годинник) перебування вантажу в процесі перевезення або загальний час завершення певної перевізної операції.

Приклад. У трьох постачальників, кожен з яких має наступні ресурси – 25, 75, 13, є п’ять споживачів, які потребують таку кількість ресурсів – 15, 35, 22, 18, 23. розробити схему оптимальних перевезень, якщо вартості перевезень C_{ij}, разом з обсягами запасів та споживання подані в наступній таблиці. Оскільки сума поставок та споживання однакова і дорівнює 113, ми маємо закриту транспортну задачу.

Сформуємо ці дані в Excel. Відведемо окрему матрицю під значення обсягів перевезень X_{ij} з i-го постачальника до j-го споживача. Знайдемо суму всіх X_{ij}, оскільки це потрібно для формування обмежень виду (5.7) - (5.8). Знайдемо добуток всіх X_{ij} на C_{ij} та їх суму, щоб сформувати цільову функцію виду (5).

			Споживачі, номер та обсяг споживання				
			1	2	3	4	5
			15	35	22	18	23
Постачальники, номер та обсяг поставок	1	25	2	6	3	4	6
	2	75	4	3	2	5	4
	3	13	6	4	3	4	3

Застосовуємо функцію Розв'язувач і отримуємо рішення, яке показано в таблиці, що розташована нижче

		Споживачі					
		1	2	3	4	5	$\Sigma\ X_{ij}$
Постачальники	1	15	0	0	10	0	25
	2	0	35	22	5,1991	12,8009	75
	3	0	0	0	2,8009	10,1991	13
$\Sigma\ X_{ij}$		15	35	22	18	23	

Тут ми бачимо обсяги оптимальних перевезень з кожного постачальника на кожного споживача. Наприклад, з першого постачальника треба відправити на першого споживача 15 одиниць продукції, а на четвертого – 10. Мінімальна вартість усіх перевезень – 338 умовних одиниць.

Матрична постановка транспортної задачі виду (1) - (5) може бути сформульована як задача складення оптимального розкладу або задачу комівояжера. Проблема полягає у тому, щоб рух поміж точками маршруту було здійснено за мінімальний час або з мінімальними витратами, відвідуючи їх тільки один раз.

Введемо наступні умовні позначення: N - число секторів, з яких починається рух об'єкта; M – число секторів в яких закінчується рух об'єкта; $C_{i\,j}$ – матриця витрат на перехід з i-го сектора в j-й- , $j – 1..M$., $i = 1..N$; D_i – матриця кількості об'єктів, які мають вийти з i-го сектора; P_j – матриця кількості об'єктів, які мають прийти в j-й сектор; $X_{i\,j}$ - матриця розкладу $X_{i\,j} = 1$, якщо здійснюється перехід з ***i***-го сектора в ***j***-й, Інакше $X_{ij} = 0$.

Критерій оптимальності – мінімум втрат на перехід з об’єкту на об’єкт

$$F(X) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{ij} \cdot X_{ij} \cdot D_i \cdot P_j \to \min \tag{9}$$

Обмеження
$$\sum_{i=1}^{N} X_{ij} = P_j,\ i = 1..N \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{M} X_{ij} = D_i,\ j = 1..Ь \tag{11}$$

$$X_{ij} = 0 \text{ або } 1 \tag{12}$$

Умова (9) означає, що установники з кожного сектора об’єкти виходять тільки один раз, умова (10) – в кожен сектор об’єкти заходять тільки один раз, умова (11) – матриця переходів має значення 0 або 1.

Завдання

1. Побудувати математичну модель представленого у варіанті завдання.
2. Ввести дані і формули на аркуш Microsoft Excel.
3. За допомогою інструменту «Пошук рішення» знайти рішення задачі – оптимальний план перевезень. Провести аналіз отриманих результатів.

Практична робота складається з трьох завдань. Першу задачу студент обирає за номером з списку академічної групи.

Завдання I

Для матриці вартостей знайти рішення транспортної задачі змінюючи наявність на складах та потреби споживачів відповідно з варіантами.

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 9 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Таблиця 3.1.

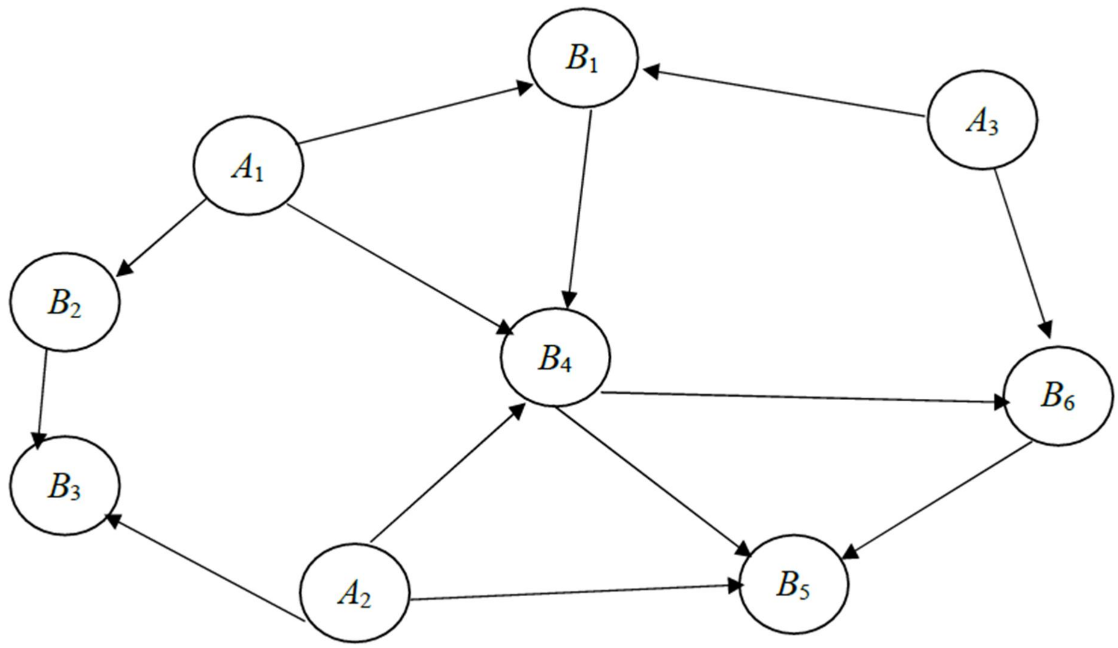
Варіанти для І завдання

Варі анти	A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4	B5
1	3	2	5	3	1	4	2	4	2
2	6	10	12	8	7	9	1	4	5
3	20	35	20	20	10	10	20	35	20
4	48	30	27	20	18	27	42	12	26
5	12	30	25	8	10	10	28	15	12
6	6	10	20	4	7	5	8	11	9
7	9	5	11	15	7	5	8	11	9
8	7	9	12	8	6	10	11	4	5
9	10	20	30	10	8	9	23	25	5
10	5	25	25	15	7	10	23	24	6
11	3	27	25	15	6	11	20	27	6
12	4	26	24	16	7	10	21	26	6
13	5	21	29	15	6	11	20	27	6
14	10	20	30	10	7	10	23	24	6
15	5	21	29	15	6	11	20	27	6
16	10	20	30	10	7	10	21	26	6
17	5	25	25	15	8	9	23	25	5
18	5	21	29	15	8	9	23	25	5
19	3	27	25	15	6	11	20	27	6
20	20	30	15	30	10	10	20	35	20
21	20	30	12	33	10	12	18	30	25
22	15	35	17	30	11	13	19	29	25
23	22	28	12	33	10	12	18	30	25
24	3	2	5	3	2	3	3	4	1
25	3	5	5	3	2	6	3	4	1

ІІ завдання

Зі складів, що позначені на рис. 3 як A_i, потрібно перевезти продукцію до постачальників, які позначені як B_j.

У табл.3 подані відстані поміж окремими об'єктами в кілометрах, запаси товарів у тонах та потреби споживачів наведено у табл.3, а вартість одного тонно-кілометра становить 0,2N. Де N – номер за списком навчальної групи. Студенти, що навчаються за скороченою програмою, до свого номеру додають число 15.



Таблиця 2

Відстані поміж об’єктами перевезень

Пара об’єктів	Відстань	Пара об’єктів	Відстань	Пара об’єктів	Відстань
A1 – B1	50N	A1 – B2	46	A1 – B4	22N
B2 – B3	96N	A2 – B3	754/N	A2 – B4	33
A2 – B5	1024/N	A3 – B1	15	A3 – B6	4N
B4 – B6	32	B4 – B5	13N	B5 – B6	88

Таблиця 3

Запаси товарів та потреби споживачів

Постачальники	Запаси товарів	Споживачі	Потреби споживачів
A1	1000	B1	300
A2	8500/N	B2	750/N
A3	220	B3	500
		B4	3N
		B5	22N
		B6	50N

Визначити тип задачі: відкрита чи закрита. Знайти оптимальний план перевезень, який би забезпечив мінімальну вартість загальних перевезень.

III завдання

Для прийняття оптимального рішення по розподілу робітників комерційної галузі за операціями треба надати постановку задачі, визначити цільову функцію та розробити математичну модель згідно табл. 3.4. Вирішення провести із застосуванням можливостей .

Таблиця 4

Хронометраж по витратам часу

Варіант	Комер-санти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	Іванов	$t_{11} = 3$	$t_{12} = 6$	$t_{13} = 5$
	Сидоров	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 3$	$t_{23} = 2$
	Петров	$t_{31} = 7$	$t_{32} = 2$	$t_{33} = 5$
2	Іванов	$t_{11} = 3$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 2$	$t_{22} = 4$	$t_{23} = 3$
	Петров	$t_{31} = 6$	$t_{32} = 1$	$t_{33} = 5$
3	Іванов	$t_{11} = 1$	$t_{12} = 2$	$t_{13} = 3$
	Сидоров	$t_{21} = 2$	$t_{22} = 4$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 4$	$t_{32} = 1$	$t_{33} = 5$
4	Іванов	$t_{11} = 5$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 7$
	Сидоров	$t_{21} = 3$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 7$	$t_{32} = 3$	$t_{33} = 5$
5	Іванов	$t_{11} = 5$	$t_{12} = 5$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 7$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 6$	$t_{32} = 4$	$t_{33} = 5$
6	Іванов	$t_{11} = 9$	$t_{12} = 10$	$t_{13} = 6$
	Сидоров	$t_{21} = 7$	$t_{22} = 6$	$t_{23} = 4$
	Петров	$t_{31} = 8$	$t_{32} = 9$	$t_{33} = 7$
7	Іванов	$t_{11} = 15$	$t_{12} = 14$	$t_{13} = 9$
	Сидоров	$t_{21} = 17$	$t_{22} = 16$	$t_{23} = 10$
	Петров	$t_{31} = 16$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 8$
8	Іванов	$t_{11} = 13$	$t_{12} = 15$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 15$	$t_{22} = 17$	$t_{23} = 20$
	Петров	$t_{31} = 16$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 18$
9	Іванов	$t_{11} = 23$	$t_{12} = 16$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 25$	$t_{22} = 17$	$t_{23} = 25$
	Петров	$t_{31} = 26$	$t_{32} = 15$	$t_{33} = 28$
10	Іванов	$t_{11} = 18$	$t_{12} = 12$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 15$	$t_{22} = 16$	$t_{23} = 21$
	Петров	$t_{31} = 19$	$t_{32} = 14$	$t_{33} = 17$
11	Іванов	$t_{11} = 17$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 14$	$t_{22} = 27$	$t_{23} = 27$
	Петров	$t_{31} = 18$	$t_{32} = 24$	$t_{33} = 28$

Варіант	Комер-санти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
12	Іванов	$t_{11} = 33$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 35$	$t_{22} = 27$	$t_{23} = 22$
	Петров	$t_{31} = 34$	$t_{32} = 24$	$t_{33} = 20$
13	Іванов	$t_{11} = 32$	$t_{12} = 27$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 33$	$t_{22} = 28$	$t_{23} = 26$
	Петров	$t_{31} = 34$	$t_{32} = 25$	$t_{33} = 28$
14	Іванов	$t_{11} = 43$	$t_{12} = 25$	$t_{13} = 19$
	Сидоров	$t_{21} = 39$	$t_{22} = 24$	$t_{23} = 16$
	Петров	$t_{31} = 38$	$t_{32} = 22$	$t_{33} = 18$
15	Іванов	$t_{11} = 53$	$t_{12} = 35$	$t_{13} = 29$
	Сидоров	$t_{21} = 49$	$t_{22} = 37$	$t_{23} = 27$
	Петров	$t_{31} = 50$	$t_{32} = 38$	$t_{33} = 28$
16	Іванов	$t_{11} = 55$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 37$
	Сидоров	$t_{21} = 57$	$t_{22} = 47$	$t_{23} = 36$
	Петров	$t_{31} = 53$	$t_{32} = 44$	$t_{33} = 38$
17	Іванов	$t_{11} = 51$	$t_{12} = 35$	$t_{13} = 27$
	Сидоров	$t_{21} = 53$	$t_{22} = 37$	$t_{23} = 29$
	Петров	$t_{31} = 55$	$t_{32} = 38$	$t_{33} = 28$
18	Іванов	$t_{11} = 57$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 37$
	Сидоров	$t_{21} = 54$	$t_{22} = 46$	$t_{23} = 39$
	Петров	$t_{31} = 55$	$t_{32} = 48$	$t_{33} = 38$
19	Іванов	$t_{11} = 54$	$t_{12} = 31$	$t_{13} = 26$
	Сидоров	$t_{21} = 55$	$t_{22} = 36$	$t_{23} = 29$
	Петров	$t_{31} = 56$	$t_{32} = 35$	$t_{33} = 28$
20	Іванов	$t_{11} = 64$	$t_{12} = 51$	$t_{13} = 46$
	Сидоров	$t_{21} = 65$	$t_{22} = 56$	$t_{23} = 49$
	Петров	$t_{31} = 66$	$t_{32} = 55$	$t_{33} = 48$
21	Іванов	$t_{11} = 73$	$t_{12} = 55$	$t_{13} = 39$
	Сидоров	$t_{21} = 75$	$t_{22} = 57$	$t_{23} = 32$
	Петров	$t_{31} = 74$	$t_{32} = 54$	$t_{33} = 30$
22	Іванов	$t_{11} = 72$	$t_{12} = 47$	$t_{13} = 59$
	Сидоров	$t_{21} = 83$	$t_{22} = 48$	$t_{23} = 56$
	Петров	$t_{31} = 84$	$t_{32} = 45$	$t_{33} = 58$
23	Іванов	$t_{11} = 93$	$t_{12} = 55$	$t_{13} = 69$
	Сидоров	$t_{21} = 99$	$t_{22} = 57$	$t_{23} = 67$
	Петров	$t_{31} = 90$	$t_{32} = 58$	$t_{33} = 68$
24	Іванов	$t_{11} = 34$	$t_{12} = 71$	$t_{13} = 86$
	Сидоров	$t_{21} = 35$	$t_{22} = 76$	$t_{23} = 89$
	Петров	$t_{31} = 36$	$t_{32} = 75$	$t_{33} = 88$
25	Іванов	$t_{11} = 73$	$t_{12} = 85$	$t_{13} = 96$
	Сидоров	$t_{21} = 72$	$t_{22} = 84$	$t_{23} = 93$
	Петров	$t_{31} = 76$	$t_{32} = 81$	$t_{33} = 95$
26	Іванов	$t_{11} = 93$	$t_{12} = 75$	$t_{13} = 86$
	Сидоров	$t_{21} = 90$	$t_{22} = 74$	$t_{23} = 84$
	Петров	$t_{31} = 92$	$t_{32} = 77$	$t_{33} = 85$
27	Іванов	$t_{11} = 43$	$t_{12} = 67$	$t_{13} = 77$
	Сидоров	$t_{21} = 40$	$t_{22} = 68$	$t_{23} = 79$
	Петров	$t_{31} = 42$	$t_{32} = 65$	$t_{33} = 75$

Варіант	Комер-санти	Витрати часу t_{ij} на виконання операцій, годин		
		1 – закупка	2 – збут	3 – перевезення
28	Іванов	$t_{11} = 95$	$t_{12} = 83$	$t_{13} = 76$
	Сидоров	$t_{21} = 92$	$t_{22} = 84$	$t_{23} = 71$
	Петров	$t_{31} = 94$	$t_{32} = 85$	$t_{33} = 75$
29	Іванов	$t_{11} = 63$	$t_{12} = 45$	$t_{13} = 55$
	Сидоров	$t_{21} = 67$	$t_{22} = 44$	$t_{23} = 57$
	Петров	$t_{31} = 60$	$t_{32} = 46$	$t_{33} = 51$
30	Іванов	$t_{11} = 52$	$t_{12} = 47$	$t_{13} = 78$
	Сидоров	$t_{21} = 49$	$t_{22} = 45$	$t_{23} = 80$
	Петров	$t_{31} = 53$	$t_{32} = 42$	$t_{33} = 79$

8. ІНДИВІДУВАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ№4.

Теорія масового обслуговування

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета завдання. Вивчити теорію масового обслуговування для можливості зазначення найбільш імовірного розміру черги.

Теоретичні положення.

У багатьох практично важливих або ж цікавих в пізнавальному відношенні ситуаціях доводиться з'ясовувати закономірності появи певного типу подій, який називається потоком подій: прибуття судів в морський порт, відмови в роботі складного пристрою, заміни електричних лампочок, що перегоріли, обривів ниток на ватерній машин і т. д. Розрахунок роботи багатьох підприємств побутового обслуговування - перукарень, кас магазинів, кількості громадського транспорту, необхідної кількості ліжок в лікарнях, пропускної спроможності шлюзів, переїздів, мостів і т. д. тісно пов'язаний з вивченням такого роду потоків. Цим займається теорія масового обслуговування.

Визначимо через t проміжок часу, який нас цікавить, і покладемо, що $P_k(t)$ є ймовірність появи k подій потоку за цей проміжок часу. Тоді за формулою закону розподілу Пуассона, при k=0, 1, 2,. .. з великою точністю виконується рівність

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \tag{1}$$

де λ – позитивна постійна, що характеризує «інтенсивність» надходження подій потоку. Зокрема, імовірність того, що за проміжок часу t не поступить жодної події потоку, є

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2}$$

Для задоволення деяких потреб населення організоване відповідне підприємство: перукарня, телефонна станція, лікарня зуболікарська амбулаторія і т. д. Вимоги на обслуговування поступають у випадкові моменти часу і тривалість їх обслуговування також випадкова. Питається, як будуть задоволені потреби клієнтів, якщо обладнані n місць обслуговування?

Уведемо припущення:

1) Потік вимог на обслуговування є найпростішим, тобто, Пуасонівським;

2) Тривалість обслуговування випадкова і ймовірність того, що на обслуговування доведеться затратити час, не менший ніж t, дорівнює $e^{-\upsilon t}$, де υ >0 константа;

3) Кожна вимога обслуговується одним приладом; кожний прилад обслуговує тільки одну вимогу в момент, коли він зайнятий;

4) Якщо є черга на обслуговування, то прилад, що звільнився, без втрат часу переходить до обслуговування чергової вимоги черги; 5) Кількість точок обслуговування є n .

Визначимо $P_k(t)$ імовірність того, що в момент t в черзі знаходиться k вимог. У сформульованих нами умовах ці ймовірності можуть бути знайдені при будь-якому k=0, 1, 2,. ..

При $1 \le k \le n$ $$\rho_k = \frac{\rho^k}{k!}\rho_0; \qquad (3)$$

при $k \ge n$ $$\rho_k = \frac{\rho^k}{n!\,n^{n-k}}\rho_0 \qquad (4)$$

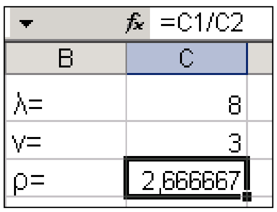
де $$\rho_0 = \left[\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\ \right]^{-1} \text{ для } \rho < n \qquad (5)$$

$$\rho_0 = 0 \qquad \text{для} \qquad \rho \ge n\ .$$

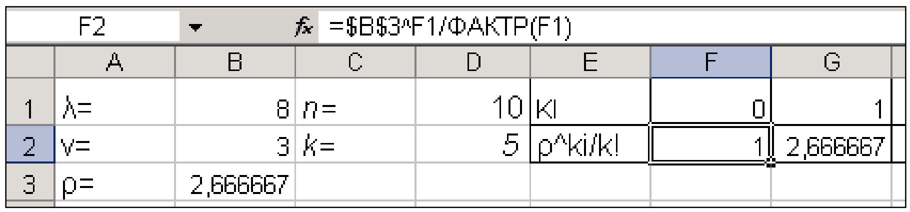
У цих формулах $\rho = \lambda/\upsilon$. Звернемо увагу на те, що при $\rho \ge n$ імовірність $\rho_0 = 0$. На підставі формул (3.50) і (3.51) виявляється, що і при будь-якому $k \ge 1$

, $P_k = 0$. Іншими словами, при $\rho \geq n$ в сталому процесі обслуговування застати в системі будь-яке кінцеве число вимог ми можемо лише з імовірністю нуль. Інакше кажучи, з імовірністю одиниця в такій системі буде нескінченно багато вимог, і утвориться нескінченна черга. Це означає наступне: у всіх випадках, коли $\rho \geq n$, черга на обслуговування необмежено зростає з часом.

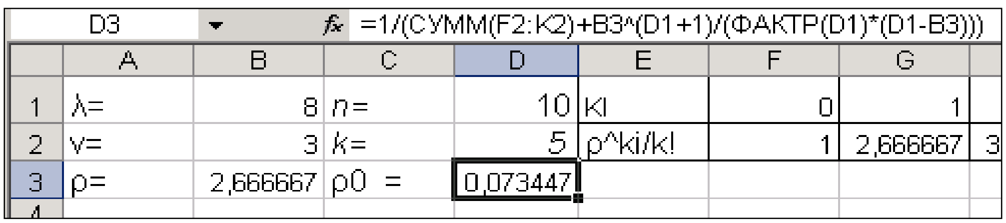
Розрахунки в середовищі Excel показані нижче.


fx =C1/C2

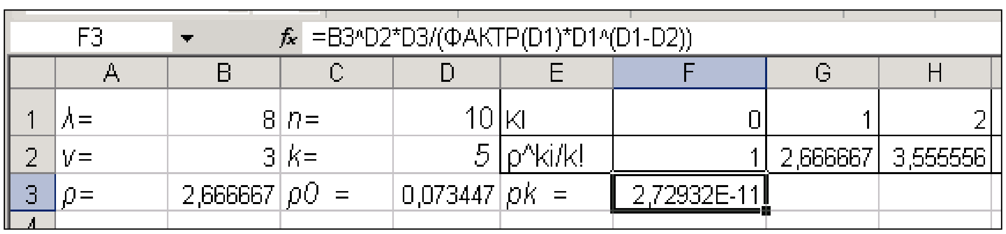
	B	C
	λ=	8
	ν=	3
	ρ=	2,666667


F2 fx =$B$3^F1/ФАКТР(F1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	λ=	8	n=	10	kl	0	1
2	ν=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667
3	ρ=	2,666667					


D3 fx =1/(СУММ(F2:K2)+B3^(D1+1)/(ФАКТР(D1)*(D1-B3)))

	A	B	C	D	E	F	G	
1	λ=	8	n=	10	kl	0	1	
2	ν=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667	3
3	ρ=	2,666667	ρ0 =	0,073447				


F3 fx =B3^D2*D3/(ФАКТР(D1)*D1^(D1-D2))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	λ=	8	n=	10	kl	0	1	2
2	ν=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667	3,555556
3	ρ=	2,666667	ρ0 =	0,073447	pk =	2,72932E-11		

Завдання.

Визначити найбільш імовірний розмір черги для даних, наведених у наступній таблиці.

Таблиця 5

Початкові дані

№ за списком групи	Інтенсивність надходження запитів	Інтенсивність обслуговування	Кількість точок обслуговування
1	9,7	5,846153846	12
2	4,7	6,846153846	6

№ за списком групи	Інтенсивність надходження запитів	Інтенсивність обслуговування	Кількість точок обслуговування
3	5,1	5,538461538	8
4	5,6	5,384615385	8
5	5,6	5,230769231	6
6	9,1	7,307692308	10
7	9,8	4,615384615	8
8	6,8	5,307692308	9
9	4,7	6,384615385	10
10	6,8	6,538461538	9
11	6,9	4,769230769	8
12	6,2	7,230769231	12
13	7,9	6	9
14	9,7	5,769230769	9
15	6,7	6,076923077	6
16	9	4,307692308	6
17	8,3	6,230769231	7
18	5,2	6,153846154	10
19	5,3	5,692307692	9
20	9,3	4,076923077	11
21	6,5	5,230769231	10
22	5	4,153846154	9
23	8	4,692307692	11
24	8,7	6,384615385	8
25	7,6	3,923076923	9
26	9,2	5,076923077	10
27	9,1	4,461538462	10
28	6	4,153846154	11
29	7	3,769230769	6
30	4,7	4,307692308	12

9. ІНДИВІДУВАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №5.

Нечіткі моделі

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета завдання. Вивчити можливості теорії нечіткого виведення для моделювання нечітких висловів.

Теоретичні положення. Існують описові моделі на звичайній мові, які дозволяють зрозуміти якісні характеристики соціально-економічної системи. Але таки моделі не дозволяють отримати потрібні для їх вивчення, прогнозування і керування числові характеристики. В такому випадку варто застосувати синтез нечітких моделей, який базується на уявленні групи експертів про функціональну діяльність системи.

Нечіткі моделі базуються на поняттях нечітких множин, які представляють собою множину можливих значень нечіткої величини у формі

Розглянемо множину X всіх чисел від 0 до 10. Визначимо підмножину A множини X всіх дійсних чисел від 5 до 8. $A = [5,8]$

Покажемо функцію приналежності множині A, ця функція ставить у відповідність число 1 або 0 кожному елементу в X, залежно від того, належить даний елемент підмножині A чи ні. Результат представлений на рис. 9.

Тепер опишемо множину молодих людей. Формально можна записати так

B = { множина молодих людей}.

Оскільки, взагалі, вік починається з 0, то нижня межа цієї множини повинна бути нулем. Верхню межу визначити складніше. Спочатку встановимо верхню межу, скажімо, рівну 20 рокам. Таким чином, маємо B як чітко обмежений інтервал, буквально: $B = [0,20]$. Виникає питання: чому хтось в свій двадцятирічний ювілей – молодий, а відразу наступного дня вже не молодий? Очевидно, це структурна проблема, і якщо пересунути верхню межу в іншу точку, то можна поставити таке ж питання.

Природніший шлях створення множини *B* полягає в ослабленні строгого ділення на молодих і не молодих. Зробимо це, виносячи не тільки чіткі думки "Так, він належить множині молодих людей" чи ні, вона не належить множині молодих людей", але і гнучкі формулювання "Так, він належить до досить молодих людей" чи ні, він не дуже молодий".

Розглянемо як за допомогою нечіткої множини визначити вираз "він ще молодий". У першому прикладі ми кодували всі елементи множини за допомогою 0 чи 1. Простим способом узагальнити дану концепцію є введення значень між 0 і 1. Реально можна навіть допустити нескінченне число значень між 0 і 1, в одиничному інтервалі $I = [0, 1]$.

Для наочності приведемо характеристичну функцію множини молодих людей, як і в першому прикладі.

Хай $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $M = [0,1]$; A – нечітка множина, для якої $\mu A(x_1)=0{,}3$; $\mu A(x_2)=0$; $\mu A(x_3)=1$; $\mu A(x_4)=0{,}5$; $\mu A(x_5)=0{,}9$

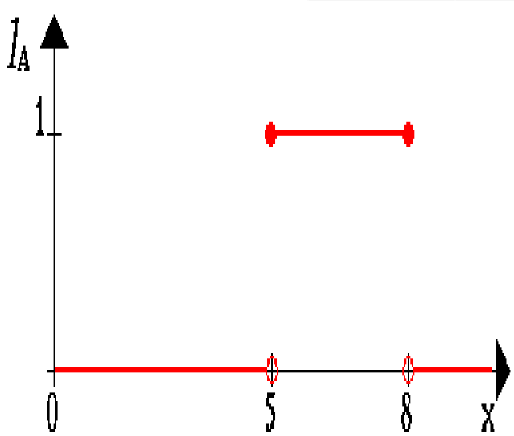
Тоді A можна представити у вигляді:

$A = \{0{,}3/x_1;\ 0/x_2;\ 1/x_3;\ 0{,}5/x_4;\ 0{,}9/x_5\}$ або

$A = 0{,}3/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0{,}5/x_4 + 0{,}9/x_5$

(знак "+" є операцією не складання, а об'єднання) або

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A =	0,3	0	1	0,5	0,9



4.9. Зображення приналежності звичайної (чіткої) множини

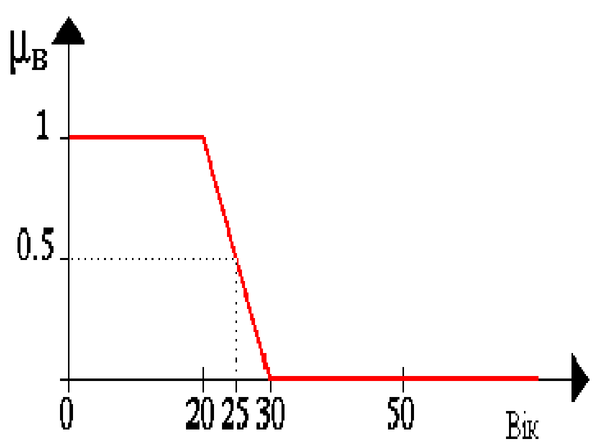


Рис. 4.10. Характеристична функція множини молодих людей

Сукупність функцій приналежності для кожного терма з базової терм-множини *T* зазвичай зображуються разом на одному графіку. На рис. 4 приведений приклад описаної вище лінгвістичної змінної «Ціна акції.

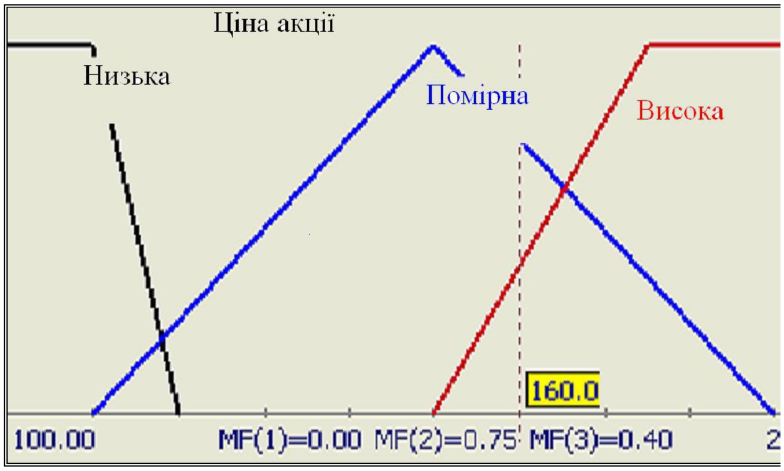


Рис. 4.. Опис лінгвістичних змінних для категорії «Ціна акції»: «низька», «помірна» та «висока».

Непрямі методи визначення значень функції приналежності використовуються у випадках, коли немає елементарних вимірних властивостей для визначення нечіткої множини. Як правило, це методи попарних порівнянь. Якби значення функцій приналежності були відомі, наприклад, □$A(x_i) = w_i$, i=1,2,...,n,, тоді попарні порівняння можна представити матрицею відносин A = {a_{ij}}, де $a_{ij}=w_i/w_j$ (операція ділення).

Простіше всього створення таких функцій приналежності проводити з групою експертів, які для кожної функції приналежності виражають власну думку щодо приналежності, наприклад, ціни акції до категорії «низька». Нехай їх було 10. Коли запитали при ціну в 100 одиниць – всі 10 сказали, що ціна низька. Тут □A(100)=10/10 = 1,0. Коли запитали про ціну 110 одиниць – тільки дев’ятеро сказали, що ціна ще низька, отже □A(110)=9/10 = 0,9. Коли їх було запропоновано ціну в 115 грошових одиниць – п’ятеро сказали, що ціна ще низька, тобто □A(115)=5/10 = 0,5. А для ціни в 120 – ніхто з експертів не погодився, що ціна є низькою, отже μA(120)=0/10 = 0,0.

Такий алгоритм дозволяє побудувати функцію приналежності до певної характеристики соціально-економічної системи. Особливо актуальним є не чітке визначення критеріальних значень коефіцієнтів, що характеризують роботу підприємства, оскільки рекомендовані їх значення завжди подаються в певному діапазоні.

Існує понад десяток типових форм кривих для завдання функцій приналежності. Найбільшого поширення набули: трикутна, трапецеїдальна функції та функція приналежності Гауса.

Трикутна функція приналежності визначається трійкою чисел (a,b,c), і її значення в точці x обчислюється згідно виразу:

$$MF(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, & a\le x\le b\\[2mm] 1-\dfrac{x-c}{c-b}, & b\le x\le c\\[2mm] 0,\ \text{в остальных (}\ \text{в інших випадках} & \end{cases}, \qquad (1)$$

При (b-a)=(c-b) маємо випадок симетричної трикутної функції приналежності, яка може бути однозначно задана двома параметрами з трійки (a,b,c).

Аналогічно для завдання трапецеїдальній функції приналежності чисел (a,b,c,d)

необхідна четвірка

$$MF(x)=\begin{cases}1-\dfrac{b-x}{b-a}, & a\le x\le b\\[2mm] 1,\ b\le x\le c & \\[2mm] 1-\dfrac{x-c}{d-c}, & c\le x\le d\\[2mm] 0, & \text{в інших випадках}\end{cases},$$

При (b-a)=(d-c) трапецеїдальна функція приналежності приймає симетричний вигляд.

Функція приналежності гауссова типу описується формулою

$$MF(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2\right], \qquad (2)$$

і оперує двома параметрами. Параметр c позначає центр нечіткої множини, а параметр σ відповідає за крутизну функції.

Інколи застосовують кругову функцію виду

$$\mu(x)=\frac{1}{1+\frac{(x-a)^2}{b}}/x \quad \text{або} \quad \mu(x)=a\sqrt{\frac{x}{x_{max}}\left(1-\frac{x}{x_{max}}\right)}, \qquad (3)$$

Де a, b – діапазон значень x, в межах якого зображується півколо, $x_{мах}$ – найбільше значення аргументу, до якого сягає чверть кола. На рис. 4.12 представлені деякі з описаних функцій.

a *b* *c*

Рис. 5.. Типові кусочно-лінійні функції приналежності;

трикутна (a) та трапецеїдальна (b), Гауса (c).

На такому ж принципі базується і синтез моделі управління соціально-економічними системами.

Основою для синтезу нечіткого логічного управління є база правил, що містить нечіткі вислови у формі «Якщо-то» і функції приналежності для відповідних лінгвістичних термів (тобто, нечітких множин, які визначають лінгвістичну змінну). При цьому повинні дотримуватися наступні умови:

1. Існує хоч би одне правило для кожного лінгвістичного терма вихідний змінної.

2. Для будь-якого терма вхідної змінної є хоча б одне правило, в якому цей терм використовується як передумова (ліва частина правила).

Інакше має місце неповна база нечітких правил.

Приклад. Групі експертів з 8 осіб було запропоновано визначити дії керівництва щодо прийнятного рівень коефіцієнтів швидкої ліквідності та платоспроможності, нижче якого робота підприємства вважається незадовільною. Такими діями було визнано збільшення статутного капіталу пропорційно величині зменшення означених показників. Тобто, потрібно синтезувати модель управління статутним капіталом підприємства.

Вирішення задачі почнемо з визначення діапазону значень аргументів x для трьох нечітких множин: A_1 – множина значень коефіцієнта швидкої ліквідності , A_2 – множина значень коефіцієнта платоспроможності, B – множина значень збільшення статутного капіталу на 10% відносно рівня зменшення суми двох означених коефіцієнтів. В спеціальній літературі було означено прийнятний рівень першого коефіцієнта 0.6 - 0.8, а для другого – більше 0.5. Тому діапазон можливих значень для обох коефіцієнтів було обрано 0,2 - 0,8. Діапазон можливих значень x для множини B – 0,4 – 1,6.

Потім було проведено опитування експертів щодо незадовільних значень обох коефіцієнтів. Результати опитування наведені в наведеній нижче таблиці.

Коефіцієнт	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	Кількість експертів, які вважають такий рівень коефіцієнту незадовільним						
швидкої ліквідності	8	8	8	7	4	1	0
платоспроможності	8	8	7	6	2	0	0

За цією таблицею можна побудувати нечіткі множини, розрахувавши степінь приналежності як результат ділення числа згодних експертів на їх загальну кількість:

A_1 = {1,0/0,2; 1,0/0,3; 1,0/0,4; 0,875/0,5; 0,5/0,6; 0,125/0,7; 0/0,8}.

A_2 = {1,0/0,2; 1,0/0,3; 0,875/0,4; 0,75/0,5; 0,25/0,6; 0/0,7; 0/0,8}.

Визначимо тепер прийнятний рівень збільшення рівня статутного капіталу в залежності від суми коефіцієнтів. Результати опитування наведені в наступній таблиці.

<table>
<tr><td rowspan="3">Сума коефіцієнтів швидкої ліквідності</td><td>0,4</td><td>0,6</td><td>0,8</td><td>1,0</td><td>1,2</td><td>1,4</td><td>1,6</td></tr>
<tr><td colspan="7">Кількість експертів, які вважають, що при такому значенні суми двох коефіцієнтів, статутний капітал потрібно збільшити на 10%.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>7</td><td>5</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

За цією таблицею можна побудувати нечітку множину рішень збільшення статутного капіталу, розрахувавши степінь приналежності як результат ділення числа згодних експертів на їх загальну кількість:

B = {1,0/0,4; 0,875/0,6; 0,625/0,8; 0,125/1,0; 0/1,2; 0/1,4; 0/1,6}.

Визначення числових характеристик трьох нечітких множин дозволяє синтезувати структуру управління соціально-економічної системи, яка складається з двох коефіцієнтів у вигляді:

ЯКЩО x_1 це A_1 . І . x_2 це A_2, ТО y це B.

Порядок виконання.

1. Студент обирає завдання згідно останньої цифри залікової книжки.
2. Самостійно визначає кількість вхідних змінних, але не менше 2-х.
3. Вихідна змінна завжди одна.
4. Студент самостійно генерує набір нечітких правил у кількості не менше 8.
5. Студент створює нечітку модель на базі програми Matlab та її функції fuzzy.
6. Студент створює таблицю можливих значень для вхідних факторів.
7. Студент отримує чітке значення вихідного параметру і доповнює ним таблицю вхідних значень.
8. За допомогою Excel створюється нелінійна модель зв’язку вхідних та вихідних даних.

Завдання

0. Розробити систему нечіткого управління автомобілем.
1. Розробити систему нечіткого керування торгами цінних паперів на біржі.
2. Розробити систему нечіткої зміни цін, при торгівлі в роздріб.
3. Розробити систему нечіткого визначення того, чи є студент успішним.
4. Розробити систему нечіткого визначення якості роботи державної установи.
5. Розробити систему нечіткого виявлення того, що підприємство не сплачує податки.
6. Розробити систему нечіткого керівництва торговою фірмою.
7. Розробити систему нечіткого керівництва промисловим підприємством.
8. Розробити систему нечіткого управління персоналом.
9. Розробити систему нечіткого визначення здоров’я людини.

10. ІНДИВІДУВАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ№6.

Нейронні сітки

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета роботи. Вивчити можливості нейронних сіток для моделювання економічних показників.

Завдання. За вибірковими даними валюти річного балансу підприємства за 40 декад (у сотнях тисяч грн.) розрахувати модель на базі нейронних сіток та виконати розрахунки можливих значень вихідних факторів для значень вхідних, які не входили в модель.

Для отримання числових значень треба скористатися електронними таблицями Excel у наступному порядку:

1. Створити 5 стовпчиksd даних, розміром у 40 клітинок, які містять наступну формулу

   = RANDBITWEEN ((номер вашої залікової книжки – 50)*(ваш номер за списком групи); (номер вашої залікової книжки)*(ваш номер за списком групи+30))/N

   або

   =СЛУЧМЕЖДУ((номер вашої залікової книжки – 50)*(ваш номер за списком групи); (номер вашої залікової книжки)*(ваш номер за списком групи+30))/N.

   Де N = останній цифрі залікової книжки +1, +2, +3? +4, +5/

2. Відмітити ці стовпці, натиснувши кнопку „Копіювати” або сполучення кнопок “CTRL”+”C”.

3. Обрати пункт «Основне-Вставити-тільки значення».

4. Перші 4 стовпці позначити як X1 – X4, а останній – як Y.

5. Ввести ці дані у програму Statistica і побудувати нейронну модель.

6. Згенерувати додатково 10 рядків даних за тим же принципом, як у п.1.

7. Відмітити ці стовпці, натиснувши кнопку „Копіювати” або сполучення кнопок “CTRL”+”C”.

8. Обрати пункт «Основне-Вставити-тільки значення».

9. Внести значення X1 – X4 у програму Statistica і розрахувати прогнозні значення Y.

10. Порівняти результати прогнозу з фактичними значеннями Y.

11. Визначити, яка з розроблених моделей дала найкращий результат.

12. За тими ж даними з п.1 провести розрахунки коефіцієнтів лінійної та нелінійної моделей, використавши підпрограму Regression електронних таблиць Excel.

13. Провести розрахунок Y за 10 додатково згенерованими даними за отриманою моделлю.

14 Порівняти прогноз нейронних сіток з прогнозом моделі, отриманої за допомогою Regression електронних таблиць Excel.

11. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №7.

Кластерний аналіз

Критерії оцінювання: це задання оцінюється у 5 балів за національною шкалою. За кожну помилку знімається 0,1 бали. Потім оцінка перераховується за 100-бальною системою згідно існуючого положення.

Мета роботи: Вивчити методи розрахунків відстаней між об’єктами за допомогою різних метрик Евкліда та Джеффріса-Матусіти та прийоми по їх автоматичній кластерізації. Набути навичок складання математичної моделі задачі планування виробництва та її реалізації із використанням табличного процесору Excel або таблиць Calc з пакету Open Office вільного програмного забезпечення.

1. Розрахувати матриці відстаней за метриками Евкліда, та Джеффріса-Матусіти.

2. Застосувавши функцію Розві’язувач електронних таблиць Microsoft Excel, потрібно вирішити оптимальні задачі включення до кластерів для матриць відстаней, розрахованих за цими метриками.

3. Провести аналіз отриманих результатів, порівняти результати кластеризації і зробити висновки.

Приклад. Побудувати матрицю відстаней для 5-ти об’єктів, представлених чотирма факторами у наведеній нижче таблиці, за метрикою Джеффріса- Матусіти.

Рішення цієї задачі будемо виконувати у додатку Calc пакету Open Office. Спочатку проведемо нормування таблиці значень. Для цього розрахуємо середні значення, із застосуванням функції *AVERAGE*(B2:B6), де через двокрапку вказано діапазон адрес клітинок, які містять зміни значення першого фактора для всіх 5-ти об’єктів. Знаходимо стандарт, використовуючи функцію *STDEVA*(B2:B6), де так само подано діапазон клітинок для 1-го фактора. І нарешті, за допомогою формули *STANDARDIZE*(B2;$B$7;$B$8)+4 виконуємо нормування. Тут перше число – адреса клітинки, яка має бути нормована, 2-ге – адреса клітинки, де є середнє, 3-є – клітинка, де є стандарт.

Результат нормування представлено нижче.

№ об'єкта	X_1	X_2	X_3	X_4
1	87	0,39	560	2770
2	25	0,82	430	2590
3	67	0,29	270	2870
4	62	0,52	860	1920
5	53	0,54	790	2770

Знайдемо тепер матрицю відстаней за метрикою Джеффріса-Матусіти

$$d_M(x_i;y_i)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{y_i}\right)^2}\ .$$

Матриця відстаней буде мати розмір 5х5.

Спочатку знаходимо різницю коренів квадратних та зводимо їх у квадрат для кожної пари факторів за допомогою формули (*SQRT*(B13)- *SQRT*(C13))^2, тут B13 та C13 – адреси відповідних клітинок, які містять однакові фактори для різних об'єктів. Далі – знаходимо корінь квадратний з їх суми за формулою *SQRT*(*SUM*(B15:B19)).

№ об'єкта	X_1	X_2	X_3	X_4
1	5,25	3,39	3,91	4,48
2	2,51	5,54	3,38	4,02
3	4,36	2,89	2,73	4,74
4	4,14	4,04	5,13	2,27
5	3,74	4,14	4,85	4,48

Як видно з розрахунків, найменшу відстань мають об’єкти 1-5 (0,46), а найбільшу – 3-4 (0,96).

	1	2	3	4	5
1	0	0,89	0,41	0,74	0,46
2	0,89	0	0,86	0,87	0,61
3	0,41	0,86	0	0,96	0,66
4	0,74	0,87	0,96	0	0,62
5	0,46	0,61	0,66	0,62	0

4. Введемо цільову функцію, що відповідає обраному критерію внутрішньо групової однорідності об'єктів

$$Z = \sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} d_{ij} \to \max \qquad (1)$$

де q_{ij} – елемент матриці Q, d_{ij} – метрика відстані поміж об’єктами ($1 \le i,j \le N_O$).

5. Додамо до цільової функції обмеження

$$\sum_{i=1}^{N_0} q_{ij} \le N_0, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} = 1 \qquad (3)$$

Перше обмеження означає, що сума елементів q_{ij} по рядку не повинна перевищувати числа об’єктів, друге – що один і той же об’єкт не може бути включений до двох чи більше кластерів.

6. Останнє обмеження показує, що число об’єктів, включених до різних кластерів має дорівнювати їх загальній кількості

$$\sum_{i=1}^{N_0} \sum_{j=1}^{N_0} q_{ij} = N_0 \qquad (4)$$

Ознакою того, скільки об’єктів включено до кластера буде значення суми (2.3). Змінними параметрами задачі оптимізації будуть елементи матриці Q.

Перенесемо цю матрицю до Excel. Там же утворимо чисту матрицю, теж розміром 5x5, в якій будуть знаходитися елементи матриці Q. При цьому ми припускаємо, що номери стовпців у ній відповідають номерам об’єктів, а номери рядків – номерам кластерів. У матриці Q знайдемо суму по рядкам, що буде відповідати лівій частині обмеження (2,) та по стовпцях – лівій частині обмеження (3). Далі знайдемо загальну суму елементів матриці Q згідно з (4). Сума знаходиться за допомогою функції

SUM(*II*:JJ), де *II* – адреса першої клітинки, яка містить масив чисел, а *JJ* – адреса останньої клітинки. Тепер сформуємо цільову функцію виду (3,38). Для цього скористаємося функцією *SUMPRODUCT*(*II:JJ;NN:MM*), де *II:JJ* – адреса масиву відстаней, а *NN:MM* – адреса масиву матриці *Q*. Спочатку всі суми дадуть нуль, оскільки всі елементи матриці *Q* дорівнюють нулю. Застосувавши функцію Розв'язувач, ми позначаємо елементи матриці *Q*, як змінні параметри, що мають бінарний характер, спрямовуємо функціонал до мінімуму, додаємо обмеження і отримуємо наступне оптимальне рішення, для якого функціонал дорівнює 4,36.

		Об'єкти					Сума по кластерам
		1	2	3	4	5	
Кластери	1	0	1	0	0	0	1
	2	1	0	0	0	0	1
	3	0	0	0	1	1	2
	4	0	0	1	0	0	1
	5	0	0	0	0	0	0
Сума по стовпцям		1	1	1	1	1	5

Аналіз результатів показує, що у перший кластер попав 2-й об'єкт, у другий кластер – 1-й, у третій кластер – 4-й та 5-й, у четвертий кластер – 3-й, у п'ятий – не включено жодного об'єкта.

Кожному студенту надаються числові значення 9-ти параметрів для 10-ти об'єктів згідно останньої цифри залікової книжки.

Студенти повинні виконати розбиття об'єктів на кластери із застосуванням методу повного перебору, а також із застосуванням програми Statistica.

Таблиця 2.4

Варіанти завдань

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
0	64	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939	19602
	31	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606	7194
	39	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909	9504
	44	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363	11814
	87	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848	15378
	74	0,76	360	1220	448,91	2866	8,72295	1,27272	5148
	54	0,54	710	2480	149,07	8110,7	5,1291	4,10606	18084
	74	0,64	770	1790	220,22	7652,2	6,28053	2,80303	13992

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
	78	0,85	300	1690	150,76	2780,0	9,35101	4,75757	17622
	87	0,39	560	2770	501,42	8311,4	6,07117	3,96969	19074
1	25	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969	20262
	67	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484	7326
	62	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697	13530
	53	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151	13068
	42	0,42	610	1100	232,07	5474,0	4,29169	1,72727	6270
	64	0,29	700	2860	267,65	7107,6	9,69993	2,45454	14916
	30	0,57	550	2150	531,91	6305,2	8,72295	2,18181	8646
	41	0,88	800	1840	499,73	6276,5	6,28053	2,10606	12342
	68	0,37	740	1220	381,15	6047,2	5,82693	4,50000	20592
	49	0,58	490	2430	474,32	4384,9	4,57083	4,22727	8976
2	76	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121	11616
	35	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121	5214
	43	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848	14916
	52	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787	10164
	72	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939	6270
	73	0,28	460	1360	470,93	7824,1	6,62944	2,62121	8844
	88	0,37	750	2230	433,66	8712,6	10,8513	3,96969	9438
	42	0,59	770	1520	252,40	7795,5	10,6420	3,92424	5412
	69	0,72	740	990	320,16	3983,7	3,66364	4,45454	6204
	75	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333	18150
3	33	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090	19338
	41	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909	20328
	69	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181	11352
	66	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575	13398
	38	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151	19536
	57	0,5	680	1230	476,01	7709,5	8,44382	3,06060	8316
	58	0,59	410	2620	367,59	2264,1	2,82623	2,16666	7326
	33	0,69	310	1280	513,28	8110,7	5,23377	3,72727	18216
	60	0,89	800	1630	215,13	6878,4	8,79274	2,31818	14058
	32	0,76	500	2370	216,83	2350,1	6,14096	1,40909	17028
4	59	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333	13464
	68	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090	8316
	34	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393	17754
	38	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606	19866
	56	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545	5610
	84	0,43	870	1860	203,28	6591,8	4,08234	3,10606	13398
	86	0,65	540	820	166,01	2665,3	5,16399	4,09090	16500
	87	0,6	310	1740	481,09	7594,9	9,66503	3,33333	15840
	60	0,89	250	1230	370,98	7852,8	2,68667	4,43939	19602
	28	0,58	870	1670	210,05	4442,3	6,87369	4,03030	7062
5	86	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818	17094
	81	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454	18084
	58	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151	6336
	40	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424	11352
	55	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484	9306
	53	0,42	390	920	404,86	8110,7	5,09420	4,07575	9636

№ п/п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
	44	0,78	400	2730	272,73	4155,7	4,81507	2,30303	11088
	59	0,79	310	980	143,99	4384,9	8,40893	1,59090	15246
	29	0,45	890	2230	164,31	4069,7	10,9211	1,60606	16962
	88	0,7	330	1890	274,42	2722,7	5,02442	4,18181	7062
6	25	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848	20790
	69	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545	10164
	74	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121	17490
	72	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424	7062
	86	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909	20460
	63	0,51	790	2460	442,13	2436,1	10,7815	1,25757	9108
	55	0,62	770	2740	171,09	2579,4	6,21074	2,68181	11946
	84	0,83	820	990	433,66	6047,2	10,3628	2,60606	12540
	51	0,54	740	1610	447,21	4127,0	5,05931	4,77272	15708
	87	0,31	490	870	509,89	2780,0	7,25750	4,34848	15642
7	53	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272	5214
	36	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909	19866
	32	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757	9504
	71	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909	7194
	67	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303	5940
	77	0,43	330	1290	225,30	5388,0	5,23377	1,46969	5280
	40	0,64	290	2840	465,85	5072,8	5,02442	3,71212	13926
	54	0,86	850	2720	354,04	4872,2	4,46615	1,68181	18612
	49	0,68	820	3130	182,95	3152,6	10,6769	2,62121	17754
	49	0,71	250	2190	409,94	2436,1	7,85066	2,54545	19536
8	48	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787	18480
	29	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181	16962
	82	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666	19932
	53	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060	13200
	68	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757	6534
	36	0,69	530	2480	188,03	3295,9	5,37334	1,74242	14520
	82	0,86	550	2700	304,92	8827,2	2,96580	1,57575	12408
	82	0,86	820	2980	389,62	6161,9	7,99023	2,37878	10296
	27	0,73	410	1200	514,97	6563,1	7,67620	3,09090	8712
	80	0,34	690	1380	409,94	8368,7	9,59525	4,65151	14916
9	80	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878	11352
	75	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424	15444
	83	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272	6204
	38	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393	7524
	72	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333	9240
	68	0,31	690	1370	437,05	3525,1	10,8164	3,45454	9570
	40	0,68	460	1940	269,34	3754,4	3,52407	2,74242	8052
	71	0,67	730	1400	367,59	6849,7	8,40893	3,68181	17160
	83	0,75	330	2550	479,40	7365,6	5,16399	4,74242	20394
	89	0,51	440	3110	260,87	7537,5	5,1291	3,53030	8976