

Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет

«Дніпровська політехніка»



Кафедра економіки та економічної кібернетики

## *МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ*

щодо виконання лабораторних робіт з нормативної навчальної  
дисципліни циклу природничо-наукової та загальноекономічної  
підготовки

### **„Економіко-математичні методи і моделі ”**

для економічних спеціальностей студентів

Дніпропетровськ

2020

**Економіко-математичні методи та задачі:** метод. рекомендації до виконання лабораторних робіт для студентів спеціальності 051 «Економіка» / уклад.

І.М.Пістунов. – Дніпро: НТУ «ДП», 2020. – 49 с.

Укладач **І.М. Пістунов**, докт. техн. наук, проф.

## **Методичні вказівки щодо виконання лабораторних робіт**

Навчальним планом з дисципліни "Оптимізаційні методи і моделі" передбачено виконання лабораторних робіт. Перед розв'язуванням задач необхідно вивчити відповідний розділ теоретичного матеріалу.

1. При виконанні лабораторної роботи студент повинний дотримувати таких правил:

2. Титульна сторінка роботи оформлюється за зразком.

3. Розв'язування кожної задачі треба починати з наведення її повної умови.

4. Рішення задач необхідно супроводжувати поясненнями, графіками та посиланнями на відповідні теоретичні поняття та формули.

5. Якщо лабораторна робота після перевірки не зарахована, треба виправити помилки згідно з зауваженнями викладача. Це необхідно робити у кінці роботи (або в окремому зошиті), написавши спочатку титул "Робота над помилками". Вносити зміни до тексту вже перевіреної роботи категорично забороняється. Доопрацьована лабораторна робота надається для повторної перевірки разом з першим варіантом.

6. Студент, що не виконав лабораторні роботи, до іспиту не допускається.

### **Лабораторна робота № 1**

#### **Вирішення економічних оптимізаційних завдань за допомогою MS Excel. Розв'язок задач лінійного програмування. Задача планування виробництва**

**Мета роботи:** Набути навичок складання математичної моделі задачі планування виробництва та її реалізації із використанням табличного процесору Excel.

1. Побудувати математичну модель представленого у варіанті завдання.

2. Ввести дані і формули на аркуш Microsoft Excel.

3. За допомогою інструменту Пошук рішення знайти рішення задачі.

4. Провести аналіз отриманих результатів.

#### **Теоретичні відомості.**

##### **Умова задачі.**

Задача: Кондитерська фабрика для виготовлення трьох видів карамелі "Му-му", "Слива", "Ягідка" використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку, фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1т карамелі даного виду наведені у таблиці. В ній же наведена загальна кількість сировини кожного виду, яка може використовуватись фабрикою, а також прибуток від реалізації 1т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1(т) лі			Загальна кількість ни (т)
	"Му-му"	"Слива"	"Ягідка"	
Цукор	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,2	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	0	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1т продукції, грн	108	112	126	

Визначити план виробництва карамелі, який забезпечує найбільший прибуток від її реалізації. Математична модель

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \leq 800 \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \leq 600 \\ 0x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 \leq 120 \\ x_j \geq 0, j = (1,2,3) \end{cases}$$

Відповідь: Для того щоб фірма могла отримувати максимальний прибуток від продажу цукерок, вона має випускати цукерки "Му-му" (100 одиниць), цукерки "Ягідка" (1200 одиниць), виробництво цукерок "Слива" не є прибутковим, тому випускати їх не рекомендується. При збільшенні кількості сировини на 100 одиниць, всі показники кардинально змінюються.

Розв'язання:

Навести загальний вигляд розв'язку задачі планування виробництва

а) записали у комірки наступну інформацію - імена змінних

б) присвоїли значенням змінних їх імена, для цього слід виділити комірку із початковим нульовим значенням змінної і виконати команду Вставка\Имя\Присвоить [ОК] в) у комірку А6 увели текст Цільова функція г) у комірку А7 увели формулу цільової функції:

=108\*x1+112\*x2+126\*x3 д) у комірку А8 увели текст Обмеження у комірку

В8 текст Значення е) у комірки А9-А11 увели формули обмежень:

=0,8\*x1+0,5\*x2+0,6\*x3 =0,2\*x1+0,4\*x2+0,3\*x3 =0,1\*x2+0,1\*x3 ж) а у

комірки В9-В11 їх значення:

800 600 120

Контрольні запитання:

1. Як викликати "Поиск решения"?

Виконати команди Сервис\Поиск решения і у відповідному діалоговому вікні вказати необхідні параметри розв'язку.

2. Як вказати вид цільової функції?

За допомогою формули:

108\*x1+112\*x2+126\*x3

Цільова функція прямує до максимуму.

3. Яким чином задаються обмеження?

Обмеження задаються в "Пошуку рішення" → "ограничения" → "добавить".

Знайти розв'язок поданої задачі за наведеними нижче варіантами із використанням «Пошук рішення» табличного процесора Excel.

## Варіанти завдань:

0. Цех консервного заводу для виготовлення 3-х партій консервів використовує послідовно різне технологічне обладнання. Витрати обладнання на партію консервів кожного виду вказані в таблиці.

Групи обладнання	Технічні коефіцієнти			Ціна (грн.)
	продукція I	продукція II	продукція III	
A	2	4	5	120
B	1	8	6	280
C	7	4	5	140
D	4	7	6	360
Прибуток (грн.)	10	14	12	

Технічні коефіцієнти вказують, яка кількість кожного виду обладнання необхідно для виготовлення продукції кожного виду. Знайти розв'язок, взявши за мету максимальний прибуток.

1. У буфеті студентської їдальні реалізуються бутерброди 3 видів А, В, С. Їх підготовка і реалізація вимагають використання 3 видів ресурсів, норми витрат яких наведені у таблиці:

Види ресурсів	Норми витрат ресурсів на 1 партію бутербродів			Запас ресурсів
	A	B	C	
I	2	1	2	38
II	1	3	2	44
III	3	2	1	40
Прибуток (грн.)	7	6	4	

Визначити план продажу бутербродів, який забезпечить максимум прибутку від їх реалізації.

2. Цех м'ясокомбінату для виготовлення 3 видів консервів використовує послідовно різне технологічне обладнання. Витрати обладнання на партію виробів кожного виду та його ціна наведені у таблиці:

Групи обладнання	Технічні коефіцієнти			Ціна (грн.)
	"Сніданок туриста"	"Паштет печінковий"	"Паштет міський"	
A	18	15	12	360
B	6	4	8	192
C	5	3	3	180
Прибуток (грн.)	9	10	16	

Технічні коефіцієнти вказують, яка кількість кожного виду обладнання необхідна для виготовлення партії консервів кожного виду. Знайти розв'язок, взявши за мету максимальний прибуток.

3. На консервному заводі виготовляють 3 види молочних сумішей для чого використовують 3 види сировини. Норми витрат сировини на виробництво кожного виду сумішей, запаси сировини, а також прибуток від реалізації кожного виду сумішей наведені у таблиці:

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1(т) сумішей			Запаси сировини (грн.)
	"Малюк"	"Ведмедик"	"Сонечко"	
Молоко сухе	0,8	0,5	0,6	900
Мука рисова	0,4	0,4	0,3	700
Цукор	0	0,1	0,1	1000
Прибуток (грн.)	108	112	126	

Визначити план виробництва сумішей, який забезпечить найбільший прибуток.

4. Консервний завод для виробництва 3 видів овочевих консервів "Салат овочевий", "Перець фарширований", "Перчинка" використовує три види основної сировини: перець, томатний соус, моркву. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 партії консервів наведені у таблиці. В ній же наведена загальна кількість сировини кожного виду, яка може використовуватись консервним заводом, а також й прибуток від реалізації кожного виду консервів.

Вид сировини	Норми витрати сировини			Запас сировини
	"Салат овочевий"	"Перець фарширований"	"Перчинка"	
Перець	0,25	0,4	0,5	160
Томатний соус	0	0,25	0,5	180
Морква	0,7	0,5	0	140
Прибуток (грн.)	216	224	222	

Визначити план виробництва продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

5. Цех консервного заводу налагоджує виробництво 3 видів продукції, для чого потрібне обладнання і певні витрати праці. У таблиці наведені норми витрат усіх видів ресурсів та їх наявні запаси.

Види ресурсів	Витрати ресурсів на одиницю продукції			Запас ресурсів
	продукція I	продукція II	продукція III	
Обладнання	2	4	5	510
Витрати на виробництво	4	6	2	640
Витрати на обслуговування	0,5	0,3	0,3	50
Прибуток від виробництва однієї продукції	0,8	0,8	0,7	

Визначити план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

6. Цех напівфабрикатів виробляє два види продукції і при цьому використовує чотири види сировини у кількості, вказаній нижче.

Вид сировини	Витрати сировини на 1 кг продукції		Запас сировини
	продукція I	продукція II	
A	0,3	0,2	220
B	0,9	1,1	195
C	0,4	0,1	240
D	0	0,3	205
Прибуток від виробництва однієї продукції	2,5	3,5	

Визначити план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

7. Цех напівфабрикатів виробляє два види продукції і при цьому використовує чотири види сировини у кількості, вказаній нижче.

Вид сировини	Витрати сировини на 1 кг продукції		Запас сировини
	продукція I	продукція II	
A	3	2	2200
B	9	11	1950
C	4	1	2400
D	0	3	2050
Прибуток від виробництва однієї продукції	25	35	

Визначити план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток.

8. У таблиці наведені ресурси торгового підприємства на квартал і нормативи їх витрат на тис. гривень товарообігу на овочеві і плодово-ягідні консерви.

Показники	Нормативи витраті		Фонди показників
	овочеві	плодово-ягідні	
Витрати праці торговельних працівників (люд.-год.)	7	9	1700
Площа торговельних залів (кв.м.)	0,4	0,3	75
Витрати обігу (грн.)	5	4	960
Прибуток (грн.)	80	90	

Скласти квартальний план товарообігу, який забезпечить найбільший прибуток.

9. У міні-кафе реалізуються бутерброди 3 видів I, II, III. Їх підготовка і реалізація вимагають використання 4 видів сировини - A,B,C,D, норми витрат якої наведені у таблиці:

Види сировини	Норми витрат ресурсів на 1 партію бутербродів			Запас сировини
	I	II	III	
A	3	2	3	48
B	2	4	3	54
C	4	3	2	50
D	3	2	1	40
Прибуток (грн)	8	7	5	

Визначити план продажу бутербродів, який забезпечить максисум прибутку від їх реалізації.

## Лабораторна робота № 2

### Розв'язок задач лінійного програмування. Задача складання раціону

**Мета роботи:** Набути навичок складання математичної моделі задачі складання раціону та її реалізації із використанням табличного процесору Excel.

**Теоретичні відомості.**

#### 1.2. Задача складання раціону (задача про дієту, задача про суміші)

Ще один клас моделей виникає з економічних проблем, пов'язаних з виготовленням різних сумішей:

- у сільськогосподарському виробництві при визначенні складу добрив;
- при використанні різних видів пального для отримання пального іншої марки;
- в металургії при виготовленні сталі з кількох марок сталі;
- при складанні раціону харчування сім'ї, спортсменів, худоби.

Початкові дані наведені в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Вид компонента	Вага $i$ -го компонента (кг) в одному кг $j$ -го матеріалу ( $i = 1, m; j = 1, n$ )						Потрібна вага компонента в суміші, кг
	1	2	...	$j$	...	$n$	
1	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$	$b_1$
2	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2n}$	$b_2$
...	...	...	...	...	...	...	...
$i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{in}$	$b_i$
...	...	...	...	...	...	...	...
$m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	$b_m$
Ціна 1 кг матеріалу, грн/кг	$c_1$	$c_2$	...	$c_j$	...	$c_n$	
Загальна вага матеріалу в суміші, кг	$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$	

У таблиці позначено:

$a_{ij}$  [кг/кг] – вага  $i$ -го компонента (кг) в одному кг  $j$ -го матеріалу;  $b_i$  [кг] – потрібна вага  $i$ -го компонента у вихідній суміші;  $c_j$  [грн/кг] – ціна одного кг  $j$ -го матеріалу. Ці показники вважаються постійними, тобто  $a_{ij}, b_i, c_j = \text{const}$  ( $i = 1, m; j = 1, n$ ).

$x_j$  – загальна вага  $j$ -го матеріалу в суміші ( $j = 1, n$ ).

**З а в д а н н я:** отримати суміш  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  мінімальної вартості  $F$ .



Математичний опис задачі складається з функції цілі  $F = \sum c_j x_j \rightarrow \min$  та обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \geq b_3; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Побудувати математичну модель задачі.

**Задача.** До добового раціону сім'ї входять два продукти: м'ясо і фрукти. Щодо кожного з продуктів відомо: скільки в одному кілограмі міститься білка, вітаміну А, вітаміну В, вітаміну С та вартість одного кілограму м'яса та фруктів. Обчислити загальну вагу продуктів у раціоні мінімальної вартості, при умові, що у сукупності всі продукти повинні містити не менше заданої кількості компонентів (білка, вітаміну А, вітаміну В, вітаміну С).

Вид компонента	Вага компонента (у. о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у. о.
Білок	17	0,9	10
Вітамін А	0,09	12	4
Вітамін В	4,1	-	1
Вітамін С	-	7,1	1
Ціна 1 кг продукту, кг	45	19	

### Рішення

Побудуємо математичну модель задачі.

Позначимо через  $x_j$  – загальну вагу продукту  $j$ -го виду ( $j = 1, 2$ ) в раціоні. Тоді цей раціон буде містити  $17x_1 + 0,9x_2$  одиниць білка,  $0,09x_1 + 12x_2$  одиниць вітаміну А,  $4,1x_1$  одиниць вітаміну В і  $7,1x_2$  одиниць вітаміну С. Оскільки ці кількості поживних речовин в раціоні не можуть бути менше заданих границь, відповідно 10, 4, 1 і 1, то маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 17x_1 + 0,9x_2 \geq 10 \\ 0,09x_1 + 12x_2 \geq 4 \\ 4,1x_1 \geq 1 \\ 7,1x_2 \geq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\text{Загальна вартість раціону: } f(x) = 45x_1 + 19x_2 \rightarrow \min \quad (2.2)$$

Таким чином, математична модель задачі складання раціону така: скласти добовий раціон  $x = (x_1, x_2)$ , що задовольнить системі (2.1), при якому функція (2.2) набуде мінімального значення.)

### Варіанти завдань:

0)

Вид	Вага компонента (у. о.)	Потрібна вага компонента
-----	-------------------------	--------------------------

компонента	в одному кг продукту		в раціоні, у. о.
Білок	15	0,9	10
Вітамін А	0,07	12	4
Вітамін В	4,1	-	2
Вітамін Е	-	7,2	1
Ціна 1 кг продукту, грн/кг	55	15	

1)

Вид компонента	Вага компонента (у. о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у. о.
Білок	11	0,8	10
Вітамін А	0,05	11	4
Вітамін В	2,1	1	1
Вітамін С	2	7,1	1
Ціна 1 кг продукту, грн/кг	37	15	

2)

Вид компонента	Вага компонента (у. о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у. о.
Білок	20	0,7	10
Вітамін А	0,084	10	4
Вітамін В	4,4	2,1	3
Вітамін С	-	7,5	1
Ціна 1 кг продукту, грн/кг	41	18	

3)

Вид компонента	Вага компонента (у. о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у. о.
Білок	18	0,8	9
Вітамін А	0,07	11	4,4
Вітамін В	4,3	-	1
Вітамін С	-	7,6	2
Ціна 1 кг продукту, грн/кг	39	17	

4)

Вид компонента	Вага компонента (у. о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у. о.
Білок	17	0,9	10
Вітамін А	0,09	12	4
Вітамін В	4,1	-	1
Вітамін С	-	7,1	1
Ціна 1 кг продукту, грн/кг	45	19	

5)

Вид компонента	Вага компонента (у. о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у. о.
Білок	18	0,8	10
Вітамін А	0,07	11	4
Вітамін В	4,3	-	1
Вітамін С	-	7,6	1
Ціна 1 кг продукту, грн/кг	39	17	

б)

Вид компонента	Вага компонента (у. о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у. о.
Білок	17	0,9	12
Вітамін А	0,07	11	4
Вітамін В	4,1	-	1
Вітамін С	1,2	7,7	3
Ціна 1 кг продукту, грн/кг	30	21	

в)

Вид компонента	Вага компонента (у. о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у. о.
Білок	18	0,8	10
Вітамін А	0,07	11	4
Вітамін В	4,3	-	1
Вітамін С	-	7,6	1
Ціна 1 кг продукту, грн/кг	39	17	

г)

Вид компонента	Вага компонента (у. о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у. о.
Білок	17	0,9	10
Вітамін А	0,09	12	4
Вітамін В	4,1	-	1
Вітамін С	-	7,1	2
Ціна 1 кг продукту, грн/кг	46	16	

д)

Вид компонента	Вага компонента (у. о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у. о.
Білок	21	0,9	10
Вітамін А	0,1	14	4
Вітамін В	5,1	0,05	1
Вітамін С	0,01	7,1	2
Ціна 1 кг продукту, грн/кг	46	16	

## Лабораторна робота № 3

### Розв'язок задач лінійного програмування. Задача розкроювання металу за мінімумом загальних відходів

**Мета роботи:** Набути навичок складання математичної моделі задачі розкроювання металу за мінімумом загальних відходів та її реалізації із використанням табличного процесору Excel.

#### Теоретичні відомості.

Модель задачі про раціональний розкрій матеріалів має важливе значення для економії матеріалів і сировини. Розглянемо постановку задачі.

На розкрій надходить матеріал у вигляді певних одиниць стандартних розмірів. Потрібно з нього виготовити  $m$  різних виробів. Задано асортимент цих виробів, тобто  $b_i, B_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) – відповідно нижня і верхня границі кількості виробів  $i$ -го виду. Кожна одиниця вихідного матеріалу може бути розкроена  $n$  різними способами, причому використання  $j$ -го способу дає  $a_{ij}$  одиниць  $i$ -го виробу ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ). Відома величина відходів  $c_j$  з одиниці стандартного матеріалу при  $j$ -му способі розкрою.

Необхідно знайти план розкрою, що забезпечує заданий асортимент виробів при мінімальних сумарних відходах матеріалів.

За невідому  $x_j$  беремо число одиниць вихідного матеріалу, що потрібно розкрити  $j$ -м способом, тоді  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – план розкрою. Через  $f$  позначимо загальну кількість відходів. Кількість заготовок  $i$ -го виду запишемо у вигляді  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ .

Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$\begin{cases} b_1 \leq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ b_2 \leq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ b_m \leq a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \\ x_j \geq 0, j=(1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Побудувати математичну модель задачі.

#### Задача.

Рулони лінолеуму довжиною 30 м треба розрізати на шматки довжиною 15, 10 та 6 м. Причому шматків по 15 м необхідно не більш 20, шматків по 10 м – не менш 16, а шматків по 6 м – не менше 12 та не більше 22. Визначити оптимальний план розкрою лінолеуму з точки зору мінімізації відходів.

#### Рішення.

Позначимо через  $a_1, a_2$  та  $a_3$  кількість шматків довжиною відповідно 15, 10 та 6 м, що можуть бути одержані з одного рулону лінолеуму. Відповідно до умови задачі, вектор  $a=(a_1, a_2, a_3)$  визначає спосіб розкрою рулону лінолеуму тоді і тільки тоді, коли виконана умова  $0 \leq 30 - (15a_1 + 10a_2 + 6a_3) < \min\{15; 10; 6\} = 6$ .

Позначимо через  $x_j$  кількість рулонів лінолеуму, що розкрояються  $j$ -м способом ( $j=1,2,\dots,7$ ).

План розкрою визначається вектором  $x=(x_1,x_2,\dots,x_7)$ . Умови забезпечення необхідного асортименту задаються нерівностями:

$$\begin{cases} x_5 + x_6 + 2x_7 \leq 20 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 \geq 16 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 \geq 12 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 \leq 22 \\ x_j \geq 0, j=(1,2,\dots,7) \end{cases}$$

При реалізації плану  $x$  сумарна величина відходів є значенням функції

$$f(x)=2x_2+4x_3+3x_5+5x_6 \rightarrow \min$$

Таким чином, ми отримали математичну модель

### Варіанти завдань

Із листів металу розміру  $m \times n$  необхідно виготовити  $N$  заготовок розміру  $m_1 \times n_1$  та  $M$  заготовок розміру  $m_2 \times n_2$ . Скласти модель оптимізації розкроювання металу за мінімумом загальних відходів.

№ зад.	$m$	$n$	$N$	$m_1$	$n_1$	$M$	$m_2$	$n_2$
0.	7	14	900	5	6	500	3	4
1.	6	14	800	3	5	400	2	4
2.	5	15	700	2	4	300	3	3
3.	6	15	600	3	4	400	3	5
4.	7	16	500	3	5	300	2	4
5.	8	17	400	4	6	400	3	5
6.	9	18	300	5	7	400	2	4
7.	8	19	350	6	8	370	5	7
8.	9	20	500	5	7	400	4	6
9.	10	20	500	5	6	450	3	5

## Лабораторна робота 4 Статистичні розрахунки

*Завдання:* Вивчити методи розрахунків статистичних параметрів та міри узгодженості експертних оцінок.

*Порядок виконання:* для визначення свого варіанту студент використовує номер за списком навчальної групи № і обирає дані з табл. 3.2

*Методичні вказівки:* Сім експертів подали свої думки щодо п'яти економічних параметрів. Визначити: 1) статистичні характеристики (середнє, стандарт) цих оцінок; 2) можливість поєднати ці вибірки в одну та міру узгодженості за модифікованим коефіцієнтом конкордації (через ранги та абсолютні значення).

*Рекомендація:* перед розрахунком проведіть нормування факторів  $X_i$ .

Таблиця 4.

Варіанти завдань

№ п/п	№ експерта	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
1	E <sub>1</sub>	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939
	E <sub>2</sub>	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606
	E <sub>3</sub>	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909
	E <sub>4</sub>	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363
	E <sub>5</sub>	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848
2	E <sub>1</sub>	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969
	E <sub>2</sub>	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484
	E <sub>3</sub>	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697
	E <sub>4</sub>	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333
	E <sub>5</sub>	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151
3	E <sub>1</sub>	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121
	E <sub>2</sub>	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121
	E <sub>3</sub>	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848
	E <sub>4</sub>	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787
	E <sub>5</sub>	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939
4	E <sub>1</sub>	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090
	E <sub>2</sub>	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909
	E <sub>3</sub>	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181
	E <sub>4</sub>	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575
	E <sub>5</sub>	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151
5	E <sub>1</sub>	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333
	E <sub>2</sub>	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090
	E <sub>3</sub>	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393
	E <sub>4</sub>	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606
	E <sub>5</sub>	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545
6	E <sub>1</sub>	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818
	E <sub>2</sub>	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454
	E <sub>3</sub>	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151
	E <sub>4</sub>	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424

№ п/п	№ эксперта	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
	E <sub>5</sub>	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484
7	E <sub>1</sub>	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848
	E <sub>2</sub>	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545
	E <sub>3</sub>	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121
	E <sub>4</sub>	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424
	E <sub>5</sub>	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909
8	E <sub>1</sub>	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272
	E <sub>2</sub>	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909
	E <sub>3</sub>	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757
	E <sub>4</sub>	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909
	E <sub>5</sub>	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303
9	E <sub>1</sub>	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787
	E <sub>2</sub>	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181
	E <sub>3</sub>	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666
	E <sub>4</sub>	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060
	E <sub>5</sub>	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757
10	E <sub>1</sub>	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878
	E <sub>2</sub>	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424
	E <sub>3</sub>	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272
	E <sub>4</sub>	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393
	E <sub>5</sub>	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333
11	E <sub>1</sub>	0,51	610	2180	160,93	4786,2	7,78087	4,46969
	E <sub>2</sub>	0,81	270	1580	453,99	2522,0	4,71039	3,07575
	E <sub>3</sub>	0,79	730	2110	406,56	3353,2	8,09490	3,62121
	E <sub>4</sub>	0,54	280	2890	311,69	4814,8	7,32728	3,5
	E <sub>5</sub>	0,53	760	1190	176,17	7824,1	4,32658	3,98484
12	E <sub>1</sub>	0,45	440	1390	359,12	8426,0	7,57152	2,51515
	E <sub>2</sub>	0,83	540	1670	282,89	4012,4	10,3279	3,27272
	E <sub>3</sub>	0,51	330	1200	489,56	7967,4	10,3279	2,90909
	E <sub>4</sub>	0,3	500	2220	506,50	7222,3	4,60572	2,98484
	E <sub>5</sub>	0,88	460	3060	237,16	6591,8	4,46615	1,77272
13	E <sub>1</sub>	0,74	470	2290	411,64	3066,6	9,56036	1,63636
	E <sub>2</sub>	0,6	660	2820	374,37	4069,7	9,59525	4,71212
	E <sub>3</sub>	0,31	540	1290	425,19	4413,6	7,88555	1,80303
	E <sub>4</sub>	0,82	680	1020	477,70	6219,2	6,38520	1,83333
	E <sub>5</sub>	0,62	720	1690	340,49	6104,5	10,8513	3,63636
14	E <sub>1</sub>	0,67	750	1980	238,85	6161,9	8,19958	3,86363
	E <sub>2</sub>	0,5	800	2650	477,70	7766,8	9,69993	2,27272
	E <sub>3</sub>	0,73	810	1910	421,80	3381,8	4,98953	1,60606
	E <sub>4</sub>	0,67	700	2610	442,13	3496,5	9,66503	3,46969
	E <sub>5</sub>	0,31	630	1740	333,71	5416,7	9,42079	2,75757
15	E <sub>1</sub>	0,37	410	1260	362,51	8941,9	2,86113	2,28787
	E <sub>2</sub>	0,88	850	1170	216,83	2206,8	5,58269	4,60606
	E <sub>3</sub>	0,72	490	2410	413,33	7021,7	6,00139	2,30303
	E <sub>4</sub>	0,5	570	1960	496,34	3553,8	7,43196	4,22727

№ п/п	№ эксперта	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
	E <sub>5</sub>	0,61	850	2380	513,28	4184,3	5,86182	2,16666
16	E <sub>1</sub>	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939
	E <sub>2</sub>	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606
	E <sub>3</sub>	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909
	E <sub>4</sub>	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363
	E <sub>5</sub>	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848
17	E <sub>1</sub>	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969
	E <sub>2</sub>	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484
	E <sub>3</sub>	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697
	E <sub>4</sub>	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333
	E <sub>5</sub>	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151
18	E <sub>1</sub>	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121
	E <sub>2</sub>	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121
	E <sub>3</sub>	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848
	E <sub>4</sub>	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787
	E <sub>5</sub>	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939
19	E <sub>1</sub>	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090
	E <sub>2</sub>	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909
	E <sub>3</sub>	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181
	E <sub>4</sub>	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575
	E <sub>5</sub>	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151
20	E <sub>1</sub>	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333
	E <sub>2</sub>	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090
	E <sub>3</sub>	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393
	E <sub>4</sub>	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606
	E <sub>5</sub>	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545
21	E <sub>1</sub>	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818
	E <sub>2</sub>	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454
	E <sub>3</sub>	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151
	E <sub>4</sub>	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424
	E <sub>5</sub>	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484
22	E <sub>1</sub>	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848
	E <sub>2</sub>	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545
	E <sub>3</sub>	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121
	E <sub>4</sub>	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424
	E <sub>5</sub>	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909
23	E <sub>1</sub>	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272
	E <sub>2</sub>	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909
	E <sub>3</sub>	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757
	E <sub>4</sub>	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909
	E <sub>5</sub>	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303
24	E <sub>1</sub>	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787
	E <sub>2</sub>	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181
	E <sub>3</sub>	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666
	E <sub>4</sub>	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060



№ п/п	№ эксперта	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
	E <sub>5</sub>	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757
25	E <sub>1</sub>	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878
	E <sub>2</sub>	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424
	E <sub>3</sub>	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272
	E <sub>4</sub>	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393
	E <sub>5</sub>	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333
26	E <sub>1</sub>	0,51	610	2180	160,93	4786,2	7,78087	4,46969
	E <sub>2</sub>	0,81	270	1580	453,99	2522,0	4,71039	3,07575
	E <sub>3</sub>	0,79	730	2110	406,56	3353,2	8,09490	3,62121
	E <sub>4</sub>	0,54	280	2890	311,69	4814,8	7,32728	3,5
	E <sub>5</sub>	0,53	760	1190	176,17	7824,1	4,32658	3,98484
27	E <sub>1</sub>	0,45	440	1390	359,12	8426,0	7,57152	2,51515
	E <sub>2</sub>	0,83	540	1670	282,89	4012,4	10,3279	3,27272
	E <sub>3</sub>	0,51	330	1200	489,56	7967,4	10,3279	2,90909
	E <sub>4</sub>	0,3	500	2220	506,50	7222,3	4,60572	2,98484
	E <sub>5</sub>	0,88	460	3060	237,16	6591,8	4,46615	1,77272
28	E <sub>1</sub>	0,74	470	2290	411,64	3066,6	9,56036	1,63636
	E <sub>2</sub>	0,6	660	2820	374,37	4069,7	9,59525	4,71212
	E <sub>3</sub>	0,31	540	1290	425,19	4413,6	7,88555	1,80303
	E <sub>4</sub>	0,82	680	1020	477,70	6219,2	6,38520	1,83333
	E <sub>5</sub>	0,62	720	1690	340,49	6104,5	10,8513	3,63636
29	E <sub>1</sub>	0,67	750	1980	238,85	6161,9	8,19958	3,86363
	E <sub>2</sub>	0,5	800	2650	477,70	7766,8	9,69993	2,27272
	E <sub>3</sub>	0,73	810	1910	421,80	3381,8	4,98953	1,60606
	E <sub>4</sub>	0,67	700	2610	442,13	3496,5	9,66503	3,46969
	E <sub>5</sub>	0,31	630	1740	333,71	5416,7	9,42079	2,75757
30	E <sub>1</sub>	0,37	410	1260	362,51	8941,9	2,86113	2,28787
	E <sub>2</sub>	0,88	850	1170	216,83	2206,8	5,58269	4,60606
	E <sub>3</sub>	0,72	490	2410	413,33	7021,7	6,00139	2,30303
	E <sub>4</sub>	0,5	570	1960	496,34	3553,8	7,43196	4,22727
	E <sub>5</sub>	0,61	850	2380	513,28	4184,3	5,86182	2,16666

## Лабораторна робота 5 Кластеризація об'єктів

**Завдання:** Вивчити методи розрахунків відстаней між об'єктами за допомогою різних метрики Евкліда та Джеффра-Матусіти та прийоми по їх автоматичній кластеризації..

**Порядок виконання:** для визначення свого варіанту студент використовує останню цифру номеру залікової книжки  $N_3$ .

**Методичні вказівки:** 1) розрахувати матриці відстаней за метриками Евкліда, та Джеффра-Матусіти; 2) Застосувавши функцію Solve електронних таблиць Calc з пакету Open Office вільного програмного забезпечення, потрібно вирішити оптимальні задачі включення до кластерів для матриць відстаней, розрахованих за цими метриками. 3) порівняти результати кластеризації і зробити висновки.

Таблиця 3.2

Варіанти завдань

№ п/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$
0	64	0,29	340	2710	304,92	8368,7	4,98953	4,43939	19602
	31	0,73	370	2770	279,51	8483,3	7,67620	3,10606	7194
	39	0,69	470	2780	415,03	4098,3	5,47801	1,90909	9504
	44	0,54	290	1280	145,68	4728,9	4,74529	1,86363	11814
	87	0,64	340	1460	272,73	5674,6	5,61758	1,84848	15378
	74	0,76	360	1220	448,91	2866	8,72295	1,27272	5148
	54	0,54	710	2480	149,07	8110,7	5,1291	4,10606	18084
	74	0,64	770	1790	220,22	7652,2	6,28053	2,80303	13992
	78	0,85	300	1690	150,76	2780,0	9,35101	4,75757	17622
	87	0,39	560	2770	501,42	8311,4	6,07117	3,96969	19074
1	25	0,82	430	2590	164,31	5416,7	4,50104	4,46969	20262
	67	0,29	270	2870	492,95	3525,1	10,8513	2,98484	7326
	62	0,52	860	1920	528,52	4069,7	9,24633	3,19697	13530
	53	0,54	790	2770	133,82	3926,4	4,67550	4,65151	13068
	42	0,42	610	1100	232,07	5474,0	4,29169	1,72727	6270
	64	0,29	700	2860	267,65	7107,6	9,69993	2,45454	14916
	30	0,57	550	2150	531,91	6305,2	8,72295	2,18181	8646
	41	0,88	800	1840	499,73	6276,5	6,28053	2,10606	12342
	68	0,37	740	1220	381,15	6047,2	5,82693	4,50000	20592
	49	0,58	490	2430	474,32	4384,9	4,57083	4,22727	8976
2	76	0,49	750	3100	247,32	5560,0	8,65317	3,62121	11616
	35	0,49	380	1850	152,46	5760,6	4,04745	1,62121	5214
	43	0,38	290	840	138,90	4958,1	10,5722	1,34848	14916
	52	0,57	860	2030	218,52	8769,9	10,9909	3,28787	10164
	72	0,26	620	1450	203,28	8827,2	9,76971	2,43939	6270
	73	0,28	460	1360	470,93	7824,1	6,62944	2,62121	8844
	88	0,37	750	2230	433,66	8712,6	10,8513	3,96969	9438
	42	0,59	770	1520	252,40	7795,5	10,6420	3,92424	5412
	69	0,72	740	990	320,16	3983,7	3,66364	4,45454	6204
	75	0,31	380	2830	135,52	4470,9	8,51360	4,33333	18150
3	33	0,26	390	2420	526,83	2636,7	3,24494	4,09090	19338

№ п/п	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>
	41	0,29	760	1170	164,31	5846,6	8,09490	4,40909	20328
	69	0,75	640	1890	531,91	5216,1	10,1535	1,68181	11352
	66	0,54	860	2880	177,87	5846,6	3,21004	4,07575	13398
	38	0,52	360	2730	238,85	5531,3	3,66364	4,65151	19536
	57	0,5	680	1230	476,01	7709,5	8,44382	3,06060	8316
	58	0,59	410	2620	367,59	2264,1	2,82623	2,16666	7326
	33	0,69	310	1280	513,28	8110,7	5,23377	3,72727	18216
	60	0,89	800	1630	215,13	6878,4	8,79274	2,31818	14058
	32	0,76	500	2370	216,83	2350,1	6,14096	1,40909	17028
4	59	0,46	460	2300	442,13	4528,2	6,38520	3,83333	13464
	68	0,5	470	1560	282,89	3238,5	3,83810	3,09090	8316
	34	0,34	330	2070	430,27	7050,3	3,03559	2,39393	17754
	38	0,76	400	850	509,89	6706,4	8,19958	3,10606	19866
	56	0,76	890	1140	164,31	5674,6	5,58269	3,54545	5610
	84	0,43	870	1860	203,28	6591,8	4,08234	3,10606	13398
	86	0,65	540	820	166,01	2665,3	5,16399	4,09090	16500
	87	0,6	310	1740	481,09	7594,9	9,66503	3,33333	15840
	60	0,89	250	1230	370,98	7852,8	2,68667	4,43939	19602
28	0,58	870	1670	210,05	4442,3	6,87369	4,03030	7062	
5	86	0,41	510	2140	218,52	8941,9	10,2233	3,31818	17094
	81	0,33	400	1270	226,99	5359,4	5,26866	4,45454	18084
	58	0,74	630	2670	440,44	8769,9	4,67550	2,15151	6336
	40	0,57	490	810	159,23	5703,3	3,38450	2,92424	11352
	55	0,67	460	3060	181,25	4155,7	4,53593	1,98484	9306
	53	0,42	390	920	404,86	8110,7	5,09420	4,07575	9636
	44	0,78	400	2730	272,73	4155,7	4,81507	2,30303	11088
	59	0,79	310	980	143,99	4384,9	8,40893	1,59090	15246
	29	0,45	890	2230	164,31	4069,7	10,9211	1,60606	16962
88	0,7	330	1890	274,42	2722,7	5,02442	4,18181	7062	
6	25	0,42	580	1810	399,78	5101,4	8,12979	4,34848	20790
	69	0,7	800	3040	362,51	5646,0	2,79134	1,54545	10164
	74	0,46	570	2950	459,07	8082,1	3,52407	1,62121	17490
	72	0,52	360	1810	499,73	7766,8	3,83810	3,92424	7062
	86	0,68	790	1610	481,09	2206,8	10,0837	1,40909	20460
	63	0,51	790	2460	442,13	2436,1	10,7815	1,25757	9108
	55	0,62	770	2740	171,09	2579,4	6,21074	2,68181	11946
	84	0,83	820	990	433,66	6047,2	10,3628	2,60606	12540
	51	0,54	740	1610	447,21	4127,0	5,05931	4,77272	15708
87	0,31	490	870	509,89	2780,0	7,25750	4,34848	15642	
7	53	0,5	440	2510	333,71	5273,4	7,53663	4,77272	5214
	36	0,65	350	860	282,89	3840,4	9,63014	1,90909	19866
	32	0,88	550	2350	506,50	8282,7	8,33914	3,25757	9504
	71	0,46	430	1830	171,09	5187,4	7,11793	1,90909	7194
	67	0,89	750	3090	501,42	8082,1	6,35031	3,30303	5940
	77	0,43	330	1290	225,30	5388,0	5,23377	1,46969	5280
	40	0,64	290	2840	465,85	5072,8	5,02442	3,71212	13926
	54	0,86	850	2720	354,04	4872,2	4,46615	1,68181	18612
	49	0,68	820	3130	182,95	3152,6	10,6769	2,62121	17754
49	0,71	250	2190	409,94	2436,1	7,85066	2,54545	19536	
8	48	0,54	800	1670	242,24	7222,3	10,5024	1,78787	18480

№ п/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$
	29	0,54	250	1870	154,15	7136,3	8,82763	1,68181	16962
	82	0,62	540	790	169,4	4213,0	6,55966	4,66666	19932
	53	0,76	440	1750	169,4	7938,8	8,16468	3,06060	13200
	68	0,88	820	1000	262,57	4814,8	2,89602	3,75757	6534
	36	0,69	530	2480	188,03	3295,9	5,37334	1,74242	14520
	82	0,86	550	2700	304,92	8827,2	2,96580	1,57575	12408
	82	0,86	820	2980	389,62	6161,9	7,99023	2,37878	10296
	27	0,73	410	1200	514,97	6563,1	7,67620	3,09090	8712
	80	0,34	690	1380	409,94	8368,7	9,59525	4,65151	14916
9	80	0,7	520	2690	154,15	5273,4	10,3977	3,87878	11352
	75	0,39	600	1460	525,14	4213,0	4,53593	3,42424	15444
	83	0,38	490	3130	469,23	7021,7	9,24633	4,27272	6204
	38	0,64	870	890	499,73	6419,8	6,35031	4,39393	7524
	72	0,77	440	1900	398,09	4127,0	10,7117	3,33333	9240
	68	0,31	690	1370	437,05	3525,1	10,8164	3,45454	9570
	40	0,68	460	1940	269,34	3754,4	3,52407	2,74242	8052
	71	0,67	730	1400	367,59	6849,7	8,40893	3,68181	17160
	83	0,75	330	2550	479,40	7365,6	5,16399	4,74242	20394
89	0,51	440	3110	260,87	7537,5	5,1291	3,53030	8976	

## Лабораторна робота № 6

### Транспортна задача

**Мета роботи:** Набути навичок складання математичної моделі транспортної задачі, розв'язання методом північно-західного кута та її реалізації із використанням табличного процесору Excel.

1. Побудувати математичну модель представленого у варіанті завдання.
2. Ввести дані і формули на аркуш Microsoft Excel.
3. За допомогою інструменту Пошук рішення знайти рішення задачі – оптимальний план перевезень.
4. Провести аналіз отриманих результатів.

#### Варіанти завдань по темі

Для матриці вартостей

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 9 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

виконати рішення транспортної задачі відповідно з варіантами

Таблиця 1

Варіанти	A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4	B5
1	3	2	5	3	1	4	2	4	2
2	6	10	12	8	7	9	1	4	5
3	20	35	20	20	10	10	20	35	20
4	48	30	27	20	18	27	42	12	26
5	12	30	25	8	10	10	28	15	12
6	6	10	20	4	7	5	8	11	9
7	9	5	11	15	7	5	8	11	9
8	7	9	12	8	6	10	11	4	5
9	10	20	30	10	8	9	23	25	5
10	5	25	25	15	7	10	23	24	6
11	3	27	25	15	6	11	20	27	6
12	4	26	24	16	7	10	21	26	6
13	5	21	29	15	6	11	20	27	6
14	10	20	30	10	7	10	23	24	6
15	5	21	29	15	6	11	20	27	6
16	10	20	30	10	7	10	21	26	6
17	5	25	25	15	8	9	23	25	5
18	5	21	29	15	8	9	23	25	5
19	3	27	25	15	6	11	20	27	6
20	20	30	15	30	10	10	20	35	20
21	20	30	12	33	10	12	18	30	25
22	15	35	17	30	11	13	19	29	25
23	22	28	12	33	10	12	18	30	25
24	3	2	5	3	2	3	3	4	1
25	3	5	5	3	2	6	3	4	1

## **Лабораторна робота № 7**

### **Задача комівояжера**

**Мета роботи:** Набути навичок розв'язання математичної моделі задач дискретного програмування, застосування методу гілок та меж та його реалізації із використанням табличного процесору Excel. Вивчити методи рішення задачі комівояжера.

1. Побудувати граф представленого у варіанті завдання.
2. Знайти довільний розв'язок задачі.
3. Застосувавши метод найближчого сусіда, знайти розв'язок задачі.
4. Ввести дані і формули на аркуш Microsoft Excel.
5. За допомогою методу гілок та меж знайти рішення задачі.
6. Провести аналіз отриманих результатів.

#### ***Математична модель задачі комівояжера***

Задача комівояжера може бути сформульована як цілочисельна введенням булевих змінних  $X_{ij} = 1$ , якщо маршрут включає переїзд з міста  $i$  безпосередньо в місто  $j$  і  $X_{ij} = 0$  в іншому випадку. Тоді можна задати математичну модель задачі, тобто записати цільову функцію і систему обмежень:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = \overline{1, n} \quad (2) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = \overline{1, n} \quad (3) \\ x_{ij} \geq 0 \quad i, j = \overline{1, n} \quad (4) \end{array} \right.$$

Умови (2) - (4) в сукупності забезпечують, що кожна змінна  $X_{ij}$  дорівнює або нулю, або одиниці. При цьому обмеження (2), (3) висловлюють умови, що комівояжер побуває в кожному місті один раз в нього прибувши (обмеження (2)), і один раз з нього виїхавши (обмеження (3)).

Проте цих обмежень не достатньо для постановки задачі комівояжера, так як вони не виключають розв'язок, де замість простого циклу, що проходить через  $n$  вершин, відшукуються 2 і більше окремих цикла (підцикла), що проходить через менше число вершин. Тому задача, описана рівняннями (2)-(4) повинна бути доповнена обмеженнями, що забезпечують зв'язність шуканого циклу.

Для того, щоб виключити при постановці завдання всі можливі підцикли в систему обмежень задачі включають такі обмеження:

$$(5) \quad U_i - U_j + nX_{ij} \leq n - 1, \quad \text{де} \quad i = \overline{2, n}, \quad j = \overline{2, n} \quad \text{і} \quad i \neq j.$$

За допомогою методу гілок та меж знайти рішення задачі.

**Порядок виконання роботи:**

Дана матриця відстаней, представлена в таблиці 1. Необхідно за допомогою алгоритму Літтла вирішити завдання комівояжера.

Табл.1

$\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	7	16	21	2	17
2	13	$\infty$	21	15	43	23
3	25	3	$\infty$	31	17	9
4	13	10	27	$\infty$	33	12
5	9	2	19	14	$\infty$	51
6	42	17	5	9	23	$\infty$

1) Праворуч до таблиці приєднуємо стовпець  $U_i$ , в якому записуємо мінімальні елементи відповідних рядків. Віднімаємо елементи  $U_i$  від відповідних елементів рядка матриці.

$\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	$U_i$
1	$\infty$	7	16	21	2	17	2
2	13	$\infty$	21	15	43	23	13
3	25	3	$\infty$	31	17	9	3
4	13	10	27	$\infty$	33	12	10
5	9	2	19	14	$\infty$	51	2
6	42	17	5	9	23	$\infty$	5

2) Внизу отриманої матриці приєднуємо рядок  $V_j$ , в якому записуємо мінімальні елементи стовпців. Віднімаємо елементи  $V_j$  від відповідних стовпців матриці.

$\begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	5	14	19	0	15
2	0	$\infty$	8	2	30	10
3	22	0	$\infty$	28	14	6
4	3	0	17	$\infty$	23	2
5	7	0	17	12	$\infty$	49
6	37	12	0	4	18	$\infty$

$V_j$	0	0	0	2	0	2
-------	---	---	---	---	---	---

3) В результаті обчислень отримуємо матрицю, приведену по рядках і стовпцях, яка зображена у вигляді таблиці 2.

Табл.2

$i \backslash j$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	$\infty$	5	14	17	$0^{19}$	13
<b>2</b>	$0^3$	$\infty$	8	$0^2$	30	8
<b>3</b>	22	$0^4$	$\infty$	26	14	4
<b>4</b>	3	$0^0$	17	$\infty$	23	$0^4$
<b>5</b>	7	$0^7$	17	10	$\infty$	47
<b>6</b>	37	12	$0^{10}$	2	18	$\infty$

4) Знаходимо константу приведення:

$$\gamma = \sum_{i=1}^6 U_i + \sum_{j=1}^6 V_j = 35 + 4 = 39$$

Таким чином, нижньою межею множини всіх гамільтонових контурів буде число  $\gamma = 39 = \varphi(\Omega^0) \leq z(X)$ .

5) Знаходимо степені нулів повністю приведеної матриці. Для цього як би замінюємо в ній всі нулі на знак « $\infty$ » і встановлюємо суму мінімальних елементів відповідного рядка і стовпця. Степені нулів записані в правих верхніх кутах клітин, для яких  $c_{ij} = 0$ .

6) Визначаємо максимальний степінь нуля. Він дорівнює 19 і відповідає клітині (1;5). Таким чином, претендентом на включення до гамільтонового контуру є дуга (1; 5).

7) Розбиваємо множину всіх гамільтонових контурів  $\Omega^0$  на дві:  $\Omega_{15}^1$  і  $\Omega_{15}^1$ . Матрицю  $\Omega_{15}^1$  з дугою (1; 5) отримуємо табл.2 шляхом викреслювання рядка 1 і стовпця 5. Щоб не допускати утворення негамільтонового контуру, замінюємо елемент (5; 1) на знак « $\infty$ ».

$i \backslash j$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	0	$\infty$	8	0	8
<b>3</b>	22	0	$\infty$	26	4
<b>4</b>	3	0	17	$\infty$	0
<b>5</b>	$\infty$	0	17	10	47
<b>6</b>	37	12	0	2	$\infty$



8) Матрицю гамільтонових контурів  $\Omega_{15}^1$  отримаємо з таблиці 2 шляхом заміни елементу (1;5) на знак « $\infty$ ».

i \ j	1	2	3	4	5	6	
1	$\infty$	5	14	17	$\infty$	13	5
2	0	$\infty$	8	0	30	8	
3	22	0	$\infty$	26	14	4	
4	3	0	17	$\infty$	23	0	
5	7	0	17	10	$\infty$	47	
6	37	12	0	2	18	$\infty$	
					14		

9) Робимо додаткове приведення матриці контурів  $\Omega_{15}^1 : h_{15}^1 = 0$ . Нижня межа множини  $\Omega_{15}^1$  дорівнює  $\varphi(\Omega_{15}^1) = 39$ .

10) Знаходимо константу приведення для множини контурів  $\Omega_{15}^1 : h_{15}^1 = 5 + 14 = 19$ . Отже, нижня межа множини  $\Omega_{15}^1$  дорівнює  $\varphi(\Omega_{15}^1) = 39 + 19 = 58$ .

11) Порівнюємо нижні межі підмножин  $\Omega_{15}^1$  і  $\Omega_{15}^1$ . Так як  $\varphi(\Omega_{15}^1) = 39 < \varphi(\Omega_{15}^1) = 58$ , то подальшому розгалуженню піддаємо множину  $\Omega_{15}^1$ .

На рис.1 представлено розгалуження по дузі (1; 5).

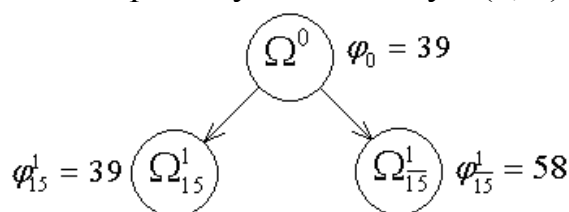


рис.1

Переходимо до розгалуження підмножини  $\Omega_{15}^1$ . Її приведена матриця представлена в таблиці нижче.

i \ j	1	2	3	4	6
2	$0^3$	$\infty$	8	$0^2$	8
3	22	$0^4$	$\infty$	26	4
4	3	$0^0$	17	$\infty$	$0^4$
5	$\infty$	$0^{10}$	17	10	47
6	37	12	$0^{10}$	2	$\infty$

12) Дізнаємося степені нулів матриці. Претендентами на включення до гамільтонового контуру будуть кілька дуг (5;2) і (6;3). Для подальших розрахунків виберемо дугу (6;3). Розбиваємо множину  $\Omega_{15}^1$  на дві підмножини:  $\Omega_{63}^2$  і  $\Omega_{63}^3$  (табл. 3 та 4). Щоб не допустити утворення негамільтонового контуру, у таблиці 3 замінюємо елемент (3;6) на знак « $\infty$ »

Табл.3

i \ j	1	2	4	6
2	0	$\infty$	0	8
3	22	0	26	$\infty$
4	3	0	$\infty$	0
5	$\infty$	0	10	47

Табл.4

i \ j	1	2	3	4	6	
2	0	$\infty$	8	0	8	
3	22	0	$\infty$	26	4	
4	3	0	17	$\infty$	0	
5	$\infty$	0	17	10	47	
6	37	12	$\infty$	2	$\infty$	2
			8			

Визначимо константи приведення для цих матриць  $h_{63}^2 = 0$ ,  $h_{63}^3 = 10$ .. Отже,  $\varphi(\Omega_{63}^2) = 39$ ,  $\varphi(\Omega_{63}^3) = 39 + 10 = 49$ . Так як  $\varphi(\Omega_{63}^2) < \varphi(\Omega_{63}^3)$ , то подальшому розгалуженню підлягає підмножина  $\Omega_{63}^2$ . Знаходимо степені нулів матриці.

i \ j	1	2	4	6
2	$0^3$	$\infty$	$0^2$	8
3	22	$0^{22}$	26	$\infty$
4	3	$0^0$	$\infty$	$0^8$
5	$\infty$	$0^{10}$	10	47

Претендентом до включення в гамільтонів контур стане дуга (3;2). Розбиваємо множину  $\Omega_{63}^2$  на дві  $\Omega_{32}^3$  і  $\Omega_{32}^4$ .

i \ j	1	4	6
2	0	0	8
4	3	$\infty$	0

5	$\infty$	10	47	10
---	----------	----	----	----

	j	1	2	4	6	
i	2	0	$\infty$	0	8	
	3	22	$\infty$	26	$\infty$	22
	4	3	0	$\infty$	0	
	5	$\infty$	0	10	47	

Очевидно,  $\varphi(\Omega_{32}^3) = 39 + 10 = 49$ ,  $\varphi(\Omega_{32}^3) = 39 + 22 = 61$ . Отже, черговому розгалуженню потрібно піддати підмножину  $\Omega_{32}^3$ .

Переходимо до розгалуження підмножини  $\Omega_{32}^3$ . Його приведена матриця представлена в таблиці нижче.

	j	1	4	6
i	2	$0^3$	$0^0$	8
	4	3	$\infty$	$0^{11}$
	5	$\infty$	$0^{37}$	37

Визначаємо степені нулів. Претендентом на включення до гамільтонового контуру є дуга (5;4). Розбиваємо множину  $\Omega_{32}^3$  на дві підмножини:  $\Omega_{54}^4$  і  $\Omega_{54}^4$ .

	j	1	6
i	2	0	8
	4	3	0

	j	1	4	6	
i	2	0	0	8	
	4	3	$\infty$	0	
	5	$\infty$	$\infty$	37	37

Знаходимо нижні межі  $\varphi(\Omega_{54}^4) = 49$ ,  $\varphi(\Omega_{54}^4) = 49 + 37 = 86$ . Отже, черговому розгалуженню потрібно піддати підмножину  $\Omega_{54}^4$ . Але її матриця має розмірність  $2 \times 2$ . Тому в гамільтонів контур слід включити дуги, що відповідають в матриці  $\Omega_{54}^4$  нульовим елементам. Це дуги (2;1) і (4;6).

На рис.2 представлено дерево розгалужень. Визначимо отриманий гамільтонів контур. До нього увійшли дуги  $\{(1,5)(6,3)(3,2)(5,4)(2,1)(4,6)\}$ . Довжина контуру дорівнює  $c_{15} + c_{54} + c_{46} + c_{63} + c_{32} + c_{21} = 2 + 14 + 12 + 5 + 3 + 13 = 49$ . Так як межі обірваних гілок більше довжини контуру  $l - 5 - 4 - 6 - 3 - 2 - 1$ , то цей контур має найменшу довжину.

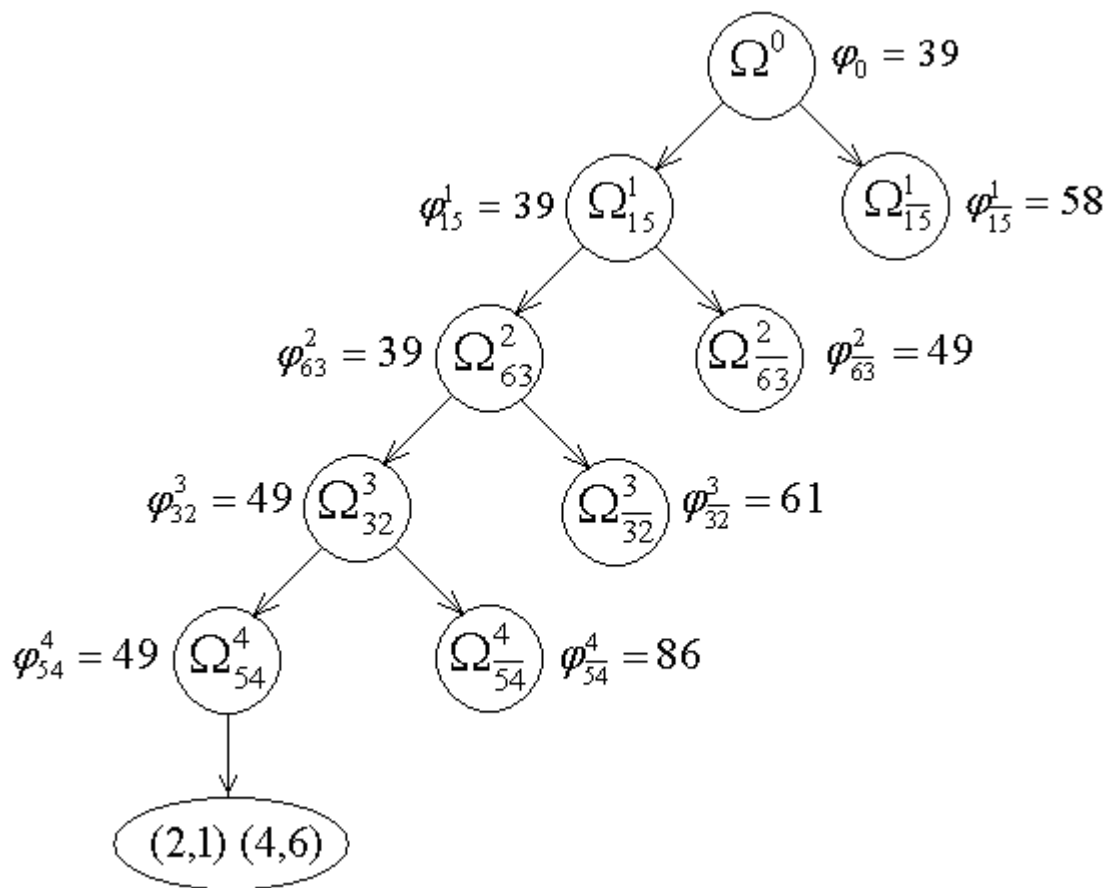


рис.2

### Варіанти завдань

Варіант 0.

$$C = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 27 & 43 & 16 \\ 2 & 7 & \infty & 16 & 1 \\ 3 & 20 & 13 & \infty & 35 \\ 4 & 21 & 16 & 25 & \infty \end{array}$$

Варіант 1.

$$C = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \infty & 15 & 23 & 12 \\ 2 & 10 & \infty & 7 & 14 \\ 3 & 22 & 24 & \infty & 38 \\ 4 & 11 & 14 & 5 & \infty \end{array}$$

Варіант 2.

$$C = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline \infty & 7 & 8 & 26 & 1 \\ 9 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & \infty & 18 & 3 \\ 31 & 26 & 15 & \infty & 4 \end{array}$$

Варіант 3.

$$C = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline \infty & 25 & 20 & 12 & 1 \\ 12 & \infty & 17 & 24 & 2 \\ 20 & 24 & \infty & 28 & 3 \\ 17 & 18 & 7 & \infty & 4 \end{array}$$

Варіант 4.

$$C = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline \infty & 27 & 4 & 16 & 1 \\ 6 & \infty & 6 & 14 & 2 \\ 8 & 13 & \infty & 19 & 3 \\ 21 & 6 & 5 & \infty & 4 \end{array}$$

Варіант 5.

$$C = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & & 20 & 38 & 45 & 1 \\ 20 & & & 31 & 11 & 2 \\ 38 & 31 & & & 3 & 3 \\ 46 & 44 & 3 & & & 4 \end{array}$$

Варіант 6.

$$C = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & & 8 & 30 & 18 & 1 \\ & 8 & & 18 & 14 & 2 \\ \hline 30 & 48 & & & 31 & 3 \\ \hline 18 & 14 & 31 & & & 4 \end{array}$$

Варіант 7.

$$C = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & & 10 & 41 & 15 & 1 \\ & 10 & & 48 & 39 & 2 \\ \hline 41 & 48 & & & 45 & 3 \\ \hline 15 & 39 & 45 & & & 4 \end{array}$$

Варіант 8.

$$C = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & & 50 & 14 & 34 & 1 \\ & 50 & & 17 & 19 & 2 \\ \hline 14 & 17 & & & 36 & 3 \\ \hline 34 & 19 & 36 & & & 4 \end{array}$$

Варіант 9.

$$C = \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & & 49 & 20 & 11 & 1 \\ & 49 & & 25 & 37 & 2 \\ \hline 20 & 25 & & & 42 & 3 \\ \hline 11 & 37 & 42 & & & 4 \end{array}$$

## Лабораторна робота № 8

### Тема: Задачі масового обслуговування.

**Мета роботи:** Виконати аналіз роботи групи верстатів, об'єднаних у технологічний комплекс.

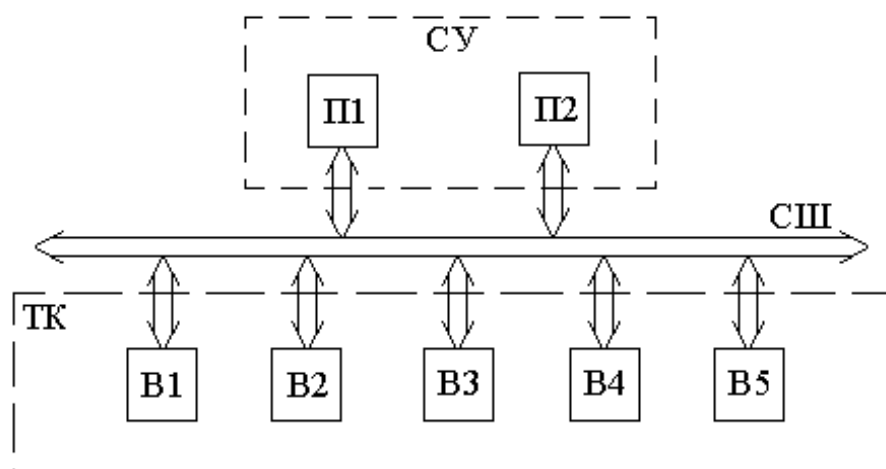
#### Порядок виконання роботи:

1. Одержати у викладача варіант завдання у тому числі:
  - кількість паралельно працюючих верстатів  $N$ ;
  - інтенсивність потоку вимог на рішення задач керування від одного верстата,  $\lambda$ ;
  - кількість процесорів у системі управління,  $k$ ;
  - продуктивність одного верстата,  $q$ .
2. Розрахувати ймовірність ефективного обслуговування технологічного комплексу, задаючи значення  $k = 0, 1, 2, \dots, k$ .
3. Розрахувати ймовірність ефективного обслуговування технологічного комплексу для нового значення  $\lambda$ .
4. Зробити аналіз одержаних результатів та зробити висновки щодо впливу параметрів програмно-технічних засобів системи управління на продуктивність технологічного комплексу. Порівняти два варіанта системи, та визначити кращій з них.

#### Методичні вказівки до виконання роботи

Функціональна схема системи, наприклад для  $n = 2$ ,  $k = 5$  має вигляд наведений на мал.8.1.

Позначення: П1, П2 – процесори; В1...В5 – верстати; СУ – комп'ютерна система управління; СШ – спільна шина.



Малюнок 8.1.

У багатьох практично важливих або ж цікавих в пізнавальному відношенні ситуаціях доводиться з'ясовувати закономірності появи певного типу подій, який називається потоком подій: прибуття судів в морський порт, відмови в роботі складного пристрою, заміни електричних лампочок, що перегоріли, обривів ниток на ватерній машин і т. д. Розрахунок роботи багатьох підприємств побутового обслуговування - перукарень, кас магазинів, кількості громадського транспорту, необхідної кількості ліжок в лікарнях, пропускної спроможності шлюзів, переїздів, мостів і т. д. тісно пов'язаний з вивченням такого роду потоків. Цим займається теорія масового обслуговування.

Визначимо через  $t$  проміжок часу, який нас цікавить, і покладемо, що  $P_k(t)$  є ймовірність появи  $k$  подій потоку за цей проміжок часу. Тоді за формулою закону розподілу Пуассона, при  $k=0, 1, 2, \dots$  з великою точністю виконується

D2	A	B	C	D	E
1	$\lambda =$	0,5	$k =$	1	
2	$t =$	2	$P_k(t) =$	0,367879	

$$\text{рівність } P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (3.50)$$

де  $\lambda$  – позитивна постійна, що характеризує «інтенсивність»

надходження подій потоку. Зокрема, ймовірність того, що за проміжок часу  $t$  не поступить жодної події потоку, є

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad (3.51)$$

Для задоволення деяких потреб населення організоване відповідне підприємство: перукарня, телефонна станція, лікарня зуболікарська амбулаторія і т. д. Вимоги на обслуговування поступають у випадкові моменти часу і тривалість їх обслуговування також випадкова. Питається, як будуть задоволені потреби клієнтів, якщо обладнані  $n$  місць обслуговування?

Уведемо припущення. 1) Потік вимог на обслуговування є найпростішим; 2) Тривалість обслуговування випадкова і ймовірність того, що на обслуговування доведеться затратити час, не менший ніж  $t$ , дорівнює  $e^{-\nu t}$ , де  $\nu > 0$  константа; 3) Кожна вимога обслуговується одним приладом; кожний прилад обслуговує тільки одну вимогу в момент, коли він зайнятий; 4) Якщо є черга на обслуговування, то прилад, що звільнився, без втрат часу переходить до обслуговування чергової вимоги черги; 5) Кількість точок обслуговування є  $n$ .

Визначимо  $P_k(t)$  ймовірність того, що в момент  $t$  в черзі знаходиться  $k$  вимог. У сформульованих нами умовах ці ймовірності можуть бути знайдені при будь-якому  $k=0, 1, 2, \dots$

$$\text{При } 1 \leq k \leq n \quad \rho_k = \frac{\rho^k}{k!} \rho_0; \quad (3.52)$$

$$\text{при } k \geq n \quad \rho_k = \frac{\rho^k}{n! n^{n-k}} \rho_0 \quad (3.53)$$

$$\text{де } \rho_0 = \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right]^{-1} \text{ для } \rho < n \quad (3.54)$$



$$\rho_0=0 \quad \text{для} \quad \rho \geq n .$$

У цих формулах  $\rho = \lambda/v$ . Звернемо увагу на те, що при  $\rho \geq n$  імовірність  $P_0=0$ . На підставі формул (3.50) і (3.51) виявляється, що і при будь-якому  $k \geq 1$ ,  $P_k=0$ . Іншими словами, при  $\rho \geq n$  в сталому процесі обслуговування застати в системі будь-яке кінцеве число вимог ми можемо лише з імовірністю нуль, тобто з імовірністю одиниця в такій системі буде нескінченно багато вимог, і утвориться нескінченна черга. Це означає наступне: у всіх випадках, коли  $\rho \geq n$ , черга на обслуговування необмежено зростає з часом.

Розрахунки в середовищі Excel за формулами (3.52) та (3.54) проводяться послідовно, починаючи з визначення  $\rho$ , далі суми у формулі (3.54), далі –  $\rho_0$ , далі – ймовірність утворення черги, довжиною  $k$ .

F1		F2		D3				F3								
fx = C1/C2		fx = \$B\$3*F1/ФАКТР(F1)		fx = 1/(СУММ(F2:K2)+B3^(D1+1)/(ФАКТР(D1)*(D1-B3)))				fx = B3^D2*D3/(ФАКТР(D1)*D1^(D1-D2))								
B	C	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G	H
λ=	8	λ=	8	n=	10	k1	0	1	λ=	8	n=	10	k1	0	1	2
v=	3	v=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667	v=	3	k=	5	ρ^ki/k!	1	2,666667	3,555556
ρ=	2,666667	ρ=	2,666667	ρ0 =	0,073447				ρ=	2,666667	ρ0 =	0,073447	ρk =	2,72932E-11		

Таблиця 8.1

Варіанти завдань згідно номера за списком групи.

№ п/п	кількість паралельно працюючих верстатів k	інтенсивність потоку вимог на рішення задач керування від одного верстата λ	кількість процесорів у системі управління n	час обслуговування одного верстата u
1	19	0,6111111111	3	0,5384615
2	15	0,666666667	2	0,4615385
3	10	0,9444444444	5	0,6153846
4	13	0,9444444444	2	0,7692308
5	20	0,666666667	2	0,7692308
6	12	1	4	0,7692308
7	10	0,777777778	6	0,7307692
8	15	0,555555556	5	0,5

9	13	0,9444444444	2	0,5384615
10	13	0,7222222222	3	0,6538462
11	19	0,8333333333	3	0,7307692
12	10	0,9444444444	2	0,7307692
13	10	1	3	0,7307692
14	16	1,0555555556	2	0,6153846
15	10	0,8333333333	5	0,6153846
16	19	0,6111111111	3	0,3846154
17	16	0,8888888889	5	0,4615385
18	19	0,8888888889	5	0,6538462
19	18	1	2	0,3846154
20	20	1	3	0,6923077
21	12	0,5555555556	5	0,7307692
22	12	0,5555555556	3	0,5384615
23	19	0,8888888889	6	0,5
24	13	0,9444444444	6	0,6538462
25	16	0,9444444444	4	0,5384615
26	16	1	2	0,5384615
27	11	0,5555555556	2	0,7307692
28	18	0,7222222222	6	0,5769231
29	17	1,0555555556	3	0,3846154
30	11	0,7777777778	5	0,7692308

## Лабораторна робота № 9

### Елементарна теорія портфеля.

#### Моделі Марковіца й Тобіна

Модель оптимального портфеля Марковича, яка забезпечує мінімальний ризик і задану прибутковість, має вид

$$\left. \begin{aligned} \sum_i \sum_j X_i X_j \text{cov}_{ij} &\rightarrow \min \\ \sum_i X_i M_i &= m_p \\ \sum_i X_i &= 1 \\ X_i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Перше рівняння визначає міру ризику портфеля так, як її визначив Марковіц. Тут міра ризику є критерієм оптимізації, який має прагнути до мінімуму. Друге - середню доходність портфеля ( $m_p$  – наперед заданий рівень доходності портфеля). Третє і четверте рівняння випливають із самого змісту параметрів  $X_i$ .

Оптимальний портфель Марковіца максимальної прибутковості і заданого, (прийнятного) ризику  $r_p$  можна представити у виді

$$\left. \begin{aligned} \sum_i X_i M_i &\rightarrow \max, \\ \sum_i \sum_j X_i X_j \text{cov}_{ij} &= r_p \\ \sum_i x_i &= 1, \\ X_i &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Тобін поставив оптимальну задачу формування портфеля цінних паперів з урахуванням моделі Марковіца. Але до неї було додано поняття без ризикових цінних паперів, тобто таких, доходність який з часом не змінюється. Для них було введено такі позначення:  $d_0$  – доходність без ризикового цінного паперу,  $X_0$  – частка без ризикового цінного паперу у портфелі.

Портфель Тобіна мінімального ризику має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \sum_i \sum_j X_i X_j \text{cov}_{ij} &\rightarrow \min \\ X_0 d_0 + \sum_i X_i M_i &= m_p \\ \sum_i X_i &= 1 \\ X_i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Як бачимо з формули (2.43), ризикованість портфеля від додавання без ризикових паперів не змінилася. Змінилась тільки доходність.

Портфель Тобіна максимальної ефективності має вигляд

$$\left. \begin{aligned} X_0 d_0 + \sum_i X_i M_i &\rightarrow \max, \\ \sum_i \sum_j X_i X_j \text{cov}_{ij} &= r_p, \\ \sum_i x_i &= 1, \\ X_i &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Як показали подальші дослідження цих моделей, замість ко-варіації у цих моделях можна застосовувати кореляцію. Результати від цього не зміняться.

### Приклад

Знайти оптимальний портфель цінних паперів, якщо відомі дослідження зміни їх прибутковості протягом 6 днів. Кількість типів акцій – 6. Зміна прибутковості наведена в табл. 2.1.

Задані значення  $d_0 = 9$ ,  $r_p = 0.05$ ,  $m_p = 12.2$ . Розрахувати для цих даних оптимальні портфелі за моделями Марковіца і Тобіна.

За допомогою функції COVAR(масив1;масив2) електронних таблиць Calc була розрахована трикутна матриця ко-варіацій (табл. 2.2). Тут масив1,2 – координати клітинок, які містять зміни доходності для 1 та 2 типу акцій.

Використовуючи функцію SOLVE електронних таблиць Calc, було отримано рішення для чотирьох моделей. Результати зведені в табл. 2.3

Як видно з результатів, акції типу 2 та 3 не рекомендується включати до портфеля цінних паперів взагалі. Зате акції 4-го типу включені в усі види портфелів.

Таблиця 9.1

Кількість спостережень зміни доходності	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
1	10,161	10,431	10,695	13,393	11,153	11,751
2	11,492	13,087	11,889	12,564	13,613	11,699
3	12,428	14,259	12,561	13,1	13,888	14,348
4	12,416	14,059	12,522	13,706	14,389	13,536

5	10,813	10,818	12,951	12,192	11,765	14,45
6	13,388	14,59	14,628	14,764	14,307	16,962
Середня доходність	11,783	12,874	12,541	13,2865	13,18583	13,791

Таблиця 9.2

	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
Акції типу 1	1,174867					
Акції типу 2	1,715416	2,75131				
Акції типу 3	1,022792	1,185737	1,392875			
Акції типу 4	0,602635	0,768402	0,482928	0,687508		
Акції типу 5	1,260856	2,050101	0,870436	0,510046	1,588552	
Акції типу 6	1,427621	1,515654	2,005646	0,841206	0,992756	3,23381

Таблиця 9.3

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_0$
М. Марковіца з міні ризиком	0,855	0	0	0,1443	0	0	
М. Марковіца з макс прибутком	0	0	0	0,8299	0,1273	0,04270	
М.Тобіна з міні ризиком	0,0002	0	0	0,5725	0,1780	0	0,2492
М. Тобіна з макс прибутком	0	0	0	0,2236	0,0695	0	0,7068

Таблиця 9.4

## Варіанти завдань

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
1	11,954	13,907	14,263	14,611	13,491	12,424
	11,913	12,074	11,960	15,207	13,367	14,318
	11,572	12,654	14,203	11,762	13,568	14,922
	12,591	12,880	13,333	13,217	14,256	15,677
	11,638	12,269	12,537	13,624	13,694	13,718
	12,536	13,659	13,864	12,909	12,687	14,753
	13,054	11,811	10,332	11,891	10,604	11,069
	13,64	14,892	14,471	12,323	13,143	10,781
15,513	13,702	12,71	12,08	12,9	13,549	
2	11,820	13,783	12,361	14,612	12,084	13,537
	11,806	11,931	12,132	13,444	13,332	15,209
	13,376	13,424	14,519	14,817	13,918	16,153
	12,175	12,381	14,647	13,911	13,596	14,714
	10,139	12,112	11,820	10,399	11,604	13,345
	11,786	13,505	13,440	14,856	12,688	13,533
	14,779	11,73	15,448	11,562	12,569	12,905
	12,839	14,953	13,604	15,473	11,785	11,537
13,663	13,1	11,271	12,939	13,11	10,835	
3	11,574	12,955	14,174	14,016	13,100	13,394

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
	12,602	13,421	14,663	15,042	13,572	15,713
	12,012	12,654	12,996	13,896	13,463	12,148
	12,245	13,043	14,517	15,338	14,976	14,063
	12,502	13,879	13,744	14,726	13,145	12,669
	12,976	13,482	14,434	15,594	15,467	14,364
	10,172	10,793	11,877	10,475	14,631	15,186
	13,436	11,564	14,261	14,37	14,619	11,565
	12,786	13,171	14,517	10,181	12,071	11,76
4	14,162	15,191	16,511	15,118	14,409	17,416
	12,522	12,995	15,415	15,263	14,700	13,072
	13,123	15,042	13,177	16,430	14,913	14,860
	12,043	12,570	14,005	14,864	12,917	12,820
	11,472	12,600	11,845	12,878	14,097	14,554
	12,441	13,296	13,139	15,486	12,849	14,172
	11,033	14,763	14,957	10,482	13,371	15,314
	15,651	10,311	11,749	10,069	12,505	10,373
5	10,868	11,655	15,389	13,488	11,089	11,269
	11,265	12,891	11,612	12,845	11,401	13,668
	12,131	12,365	12,890	12,283	13,833	15,160
	14,480	15,143	17,277	15,657	14,960	15,963
	12,572	13,837	12,596	13,157	15,296	16,424
	10,865	12,623	11,558	14,056	10,873	14,489
	11,962	12,287	13,799	12,841	13,769	15,677
	11,818	11,079	13,744	12,723	12,167	11,445
6	12,131	11,762	13,064	12,428	14,369	10,408
	14,065	14,698	11,58	11,955	10,015	14,067
	10,908	11,940	12,719	11,464	12,486	11,458
	9,766	9,842	10,987	10,843	12,003	13,471
	11,702	12,463	13,454	12,725	13,619	13,226
	11,472	12,097	12,784	12,302	14,188	12,603
	13,503	13,740	13,848	14,758	15,457	13,570
	15,456	16,452	16,450	17,013	17,052	17,229
7	12,38	10,757	10,85	15,517	10,13	10,23
	15,035	13,717	13,835	12,324	12,612	14,82
	13,915	13,308	13,907	14,76	10,969	13,615
	10,161	12,144	10,537	13,397	10,223	12,266
	11,492	12,945	11,892	12,298	12,097	11,582
	12,428	12,895	15,227	13,407	14,462	14,330
	12,416	13,050	14,567	15,240	13,731	13,284
	10,813	12,380	12,008	14,134	10,968	11,675
8	13,388	14,643	15,659	16,734	15,631	16,916
	14,045	13,298	11,753	10,634	10,774	13,346
	11,854	11,076	15,008	15,52	13,707	14,934
	12,293	12,613	13,244	13,098	11,317	12,795
	9,889	11,603	11,612	12,721	11,453	12,102
	12,517	13,256	12,947	12,596	12,853	13,036
	12,786	12,822	15,447	14,452	15,143	16,247
	11,863	12,114	13,359	13,437	11,913	15,300
	11,444	13,292	13,703	11,504	13,406	15,255
	14,696	15,946	16,829	17,698	16,051	17,140
	12,41	11,976	13,625	14,556	13,008	15,107
	13,18	12,788	10,561	13,739	11,082	11,067
	10,207	11,496	13,408	11,855	12,819	11,183

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
9	11,999	13,995	13,415	12,868	12,339	13,682
	12,241	12,793	14,227	13,426	12,656	15,808
	12,120	13,933	14,592	13,354	12,278	14,786
	11,506	13,401	12,193	13,845	12,406	13,317
	12,376	13,710	15,068	13,133	12,707	14,716
	12,148	13,970	15,119	12,886	14,518	13,300
	11,49	10,366	12,194	11,04	15,453	10,251
	12,547	11,26	14,502	12,471	11,346	13,189
	14,954	15,214	14,691	14,643	10,66	13,722
10	11,293	11,493	13,753	12,936	12,881	13,820
	12,112	12,919	12,415	14,048	14,770	14,310
	11,429	13,098	14,277	14,551	11,639	13,524
	10,526	11,988	11,705	12,466	11,825	10,864
	11,467	13,364	12,171	11,631	11,923	13,764
	11,467	13,334	12,338	14,208	12,271	13,324
	12,457	12,82	14,672	11,122	12,201	11,865
	11,303	11,106	14,522	12,982	10,733	13,26
11	13,577	10,597	12,214	13,755	10,945	14,422
	11,954	13,381	14,468	12,274	13,094	13,014
	11,913	12,754	14,452	13,449	14,079	14,121
	11,572	12,623	11,901	12,132	13,555	14,708
	12,591	14,289	12,943	15,645	15,376	15,788
	11,638	12,955	12,637	11,702	12,786	13,542
	12,536	14,495	14,612	14,490	12,852	12,658
	10,3	11,802	10,558	12,556	13,707	11,064
	10,077	15,049	13,202	12,789	11,011	13,633
12	10,609	12,755	12,388	10,54	10,299	10,794
	11,820	12,832	13,906	12,432	13,609	12,919
	11,806	12,724	14,135	14,936	14,227	14,873
	13,376	14,119	14,326	15,519	15,372	15,364
	12,175	12,236	14,132	13,943	12,417	13,732
	10,139	12,117	10,606	10,683	10,995	12,416
	11,786	12,572	14,074	15,135	14,459	12,269
	11,947	12,442	12,102	11,653	14,821	10,956
	12,549	13,822	12,061	13,647	10,139	14,699
13	13,769	14,628	11,745	12,76	15,414	11,804
	11,574	11,725	11,798	12,740	13,207	13,470
	12,602	14,100	13,887	14,496	13,683	15,434
	12,012	13,772	14,191	13,929	13,937	13,956
	12,245	12,743	14,992	15,045	14,583	12,772
	12,502	13,123	15,173	13,344	12,592	14,666
	12,976	13,812	15,706	15,414	15,655	14,494
	14,962	14,212	14,37	10,706	10,342	15,047
	12,605	13,714	11,913	10,173	10,266	14,133
14	13,39	10,077	13,509	12,414	11,003	14,122
	14,162	15,519	16,403	17,273	15,211	18,008
	12,522	12,853	15,488	15,031	14,035	14,447
	13,123	13,967	13,330	14,221	13,849	16,304
	12,043	13,658	13,493	13,774	14,343	13,151
	11,472	12,136	14,103	12,386	12,564	13,363
	12,441	13,616	12,717	14,347	15,090	15,575
	15,321	14,514	13,761	13,437	10,435	11,349
13,688	12,501	14,047	13,697	11,012	13,568	

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
	13,015	10,806	10,246	14,705	14,031	13,639
15	11,265	12,052	14,016	14,047	12,064	11,667
	12,131	12,983	12,296	15,291	14,095	13,940
	14,480	16,275	16,717	16,194	15,413	15,427
	12,572	13,244	14,897	14,571	15,340	15,674
	10,865	11,659	10,923	11,533	13,089	11,709
	11,962	13,388	12,492	14,907	13,977	14,358
	12,273	10,582	10,729	12,873	15,334	10,504
	11,192	11,71	12,772	14,989	12,052	12,829
	13,259	12,302	11,952	11,653	10,325	12,07
	16	10,908	11,114	13,790	11,873	13,029
9,766		11,117	12,354	11,287	12,546	10,249
11,702		12,455	13,484	12,153	13,075	12,310
11,472		12,053	11,617	14,065	11,503	13,322
13,503		14,469	14,195	16,018	14,812	15,556
15,456		17,355	16,685	15,598	16,603	19,311
10,743		13,107	13,977	10,612	13,257	10,103
14,806		12,73	11,274	14,489	13,487	11,714
13,917		11,842	10,508	14,059	10,903	14,528
17	10,161	10,431	10,695	13,393	11,153	11,751
	11,492	13,087	11,889	12,564	13,613	11,699
	12,428	14,259	12,561	13,100	13,888	14,348
	12,416	14,059	12,522	13,706	14,389	13,536
	10,813	10,818	12,951	12,192	11,765	14,450
	13,388	14,590	14,628	14,764	14,307	16,962
	10,314	11,939	13,192	11,174	10,418	13,217
	12,381	12,678	13,225	15,304	14,424	13,462
	12,574	11,391	11,633	10,652	15,083	12,711
18	9,889	11,198	10,095	12,783	11,183	10,835
	12,517	13,735	14,247	13,208	15,072	15,429
	12,786	13,231	15,070	13,013	14,133	16,174
	11,863	12,183	13,377	13,203	11,916	12,421
	11,444	11,999	13,243	14,233	13,024	12,491
	14,696	14,906	14,730	17,126	17,331	15,297
	12,894	11,848	14,255	11,461	11,5	13,227
	10,66	11,036	15,099	15,435	13,372	10,76
	14,266	13,146	14,38	13,084	14,038	14,563
19	11,999	12,509	12,361	14,850	14,026	15,078
	12,241	13,124	15,153	14,655	15,038	15,460
	12,120	12,240	12,945	12,701	13,006	13,616
	11,506	12,815	13,497	13,746	13,218	14,658
	12,376	12,808	14,477	15,690	14,127	12,427
	12,148	13,932	13,771	14,039	14,440	12,250
	14,86	10,825	14,548	13,411	15,351	14,955
	13,161	11,053	10,764	13,005	10,347	14,138
	11,6	10,567	11,483	13,277	14,139	10,91
20	11,293	11,563	14,165	14,763	12,874	14,426
	12,112	13,348	13,988	12,222	14,409	13,381
	11,429	11,680	14,364	11,472	13,201	11,925
	10,526	11,960	11,740	12,709	12,061	12,319
	11,467	11,774	11,862	12,466	12,013	12,865
	11,467	11,747	12,326	13,699	13,968	12,173
	10,912	14,664	14,595	11,794	14,64	14,949



№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
	13,139	11,744	12,389	10,087	13,563	10,031
	10,395	12,986	12,932	10,593	11,047	15,645
21	11,954	13,543	13,158	14,299	14,420	12,797
	11,913	12,292	13,565	13,888	13,886	12,930
	11,572	11,745	12,146	12,162	13,720	15,055
	12,591	14,354	12,829	14,346	13,412	16,083
	11,638	13,317	13,026	11,899	14,227	13,862
	12,536	14,156	14,004	15,164	14,165	12,651
	10,289	11,306	12,77	10,373	13,129	12,232
	10,333	10,998	14,838	12,924	10,419	11,086
	11,385	15,572	14,63	14,153	13,033	13,687
22	11,820	12,499	11,834	15,220	12,420	12,394
	11,806	12,803	14,115	14,830	12,295	14,506
	13,376	13,724	15,571	14,055	15,511	14,009
	12,175	13,275	14,218	14,957	13,936	12,930
	10,139	10,635	10,975	12,273	10,431	13,031
	11,786	13,607	14,470	14,452	13,871	12,949
	10,708	13,341	15,209	10,68	13,665	13,012
	12,658	11,912	14,035	15,569	12,802	13,533
	10,122	13,555	13,4	12,345	13,82	10,11
23	11,574	12,615	12,977	14,600	11,962	12,629
	12,602	14,600	13,219	12,806	14,657	13,855
	12,012	12,482	12,072	13,876	13,781	12,645
	12,245	14,012	13,432	14,994	14,489	14,450
	12,502	12,511	12,574	12,581	13,727	13,138
	12,976	14,279	15,732	15,464	15,332	15,686
	15,097	15,405	10,558	12,12	14,096	13,8
	11,339	15,114	12,532	11,816	13,476	14,787
	11,318	10,244	12,206	12,152	10,498	10,213
24	14,162	15,097	16,664	15,119	15,614	16,602
	12,522	13,107	13,259	15,520	14,122	15,000
	13,123	13,462	14,243	15,733	14,196	13,900
	12,043	12,656	14,471	13,502	13,883	15,184
	11,472	12,402	14,301	11,937	12,424	13,662
	12,441	12,922	12,501	14,496	14,711	16,107
	10,659	15,636	12,23	14,287	11,014	10,961
	13,512	14,707	13,778	10,52	13,035	14,277
	12,626	10,707	12,554	10,724	14,032	10,669
25	11,265	12,585	11,693	11,892	12,272	11,771
	12,131	13,804	14,553	12,888	12,203	13,570
	14,480	15,883	16,938	17,964	15,827	16,217
	12,572	13,682	14,710	13,215	14,412	12,883
	10,865	11,008	12,093	10,942	11,787	14,353
	11,962	12,771	12,948	12,553	14,741	14,898
	11,626	13,958	12,72	12,939	15,622	15,341
	13,829	10,004	15,032	11,317	12,007	11,042
	14,909	13,873	13,223	11,357	10,535	14,608
26	10,908	12,573	13,457	13,093	13,315	12,251
	9,766	11,044	11,508	11,785	10,927	10,205
	11,702	13,345	13,567	14,966	14,416	13,449
	11,472	11,740	12,569	12,698	13,065	11,547
	13,503	14,632	16,452	14,309	15,559	16,024
	15,456	16,674	17,416	16,571	17,512	19,215

№ п/п	Акції типу 1	Акції типу 2	Акції типу 3	Акції типу 4	Акції типу 5	Акції типу 6
	13,164	14,644	10,172	15,418	14,524	14,701
	11,215	10,509	12,113	13,411	14,012	14,238
	14,851	11,954	15,317	13,596	14,586	15,585
27	10,161	12,013	12,309	13,480	10,737	10,362
	11,492	12,874	12,130	11,774	12,208	13,078
	12,428	14,133	13,361	15,555	13,970	12,772
	12,416	13,743	12,485	15,630	14,477	14,736
	10,813	10,866	12,196	10,991	12,082	11,145
	13,388	15,128	13,703	16,777	13,895	17,200
	14,442	10,475	13,837	13,066	14,913	13,121
	15,174	10,341	11,349	13,326	15,443	15,154
28	14,249	11,751	12,072	10,263	11,822	15,6
	9,889	11,361	10,420	10,167	10,772	11,689
	12,517	12,568	13,011	12,590	13,770	14,967
	12,786	14,656	12,976	13,292	14,371	13,211
	11,863	13,064	14,263	15,093	13,658	12,023
	11,444	12,354	13,277	12,915	13,978	15,040
	14,696	16,068	17,289	15,475	15,921	16,822
	14,535	10,492	11,191	11,446	10,918	15,363
29	11,63	13,986	13,082	13,932	15,357	12,927
	11,047	14,227	13,488	14,959	12,389	13,697
	11,999	13,785	12,086	13,075	12,001	14,557
	12,241	13,972	12,655	15,409	14,427	15,364
	12,120	12,223	13,483	14,749	13,943	15,458
	11,506	12,741	13,154	14,019	13,421	14,352
	12,376	12,607	15,165	15,504	12,505	16,273
	12,148	13,647	13,685	13,575	13,531	13,580
30	13,24	14,403	15,172	10,629	11,94	15,244
	13,674	11,491	12,799	13,506	15,211	10,11
	10,233	12,527	13,669	15,065	12,619	13,842
	11,293	11,455	11,496	13,262	12,301	13,370
	12,112	13,212	14,231	14,946	12,130	13,687
	11,429	12,990	11,766	14,277	12,649	12,901
	10,526	10,985	11,664	10,955	12,575	11,408
	11,467	13,087	13,639	12,660	11,969	14,170
	11,467	12,661	13,769	11,926	13,023	14,202
	10,14	14,299	14,09	11,063	13,002	14,751
	11,972	15,428	10,125	10,795	11,87	12,271
	13,205	13,88	10,163	12,077	14,07	15,495

Варіанти завдань

Таблиця 9.5

№ варіанта	$m_0$	$r_p$	$m_p$	№ варіанта	$m_0$	$r_p$	$m_p$
1	10	0,3	13,5	16	9	0,05	12,2
2	10	0,3	13,3	17	9	0,05	12,2
3	10	0,3	12,55	18	9	0,05	12,2
4	10	0,3	12,55	19	9	0,05	12,2
5	10	1	12,55	20	9	0,05	12,2

№ варіанта	$m_0$	$r_p$	$m_p$	№ варіанта	$m_0$	$r_p$	$m_p$
6	10	0,5	12,7	21	9	0,05	12,35
7	10	0,04	12,7	22	9	0,088	12,8
8	10	0,04	12,7	23	9	0,09	12,8
9	10	0,04	12,7	24	9	0,12	12,8
10	10	0,04	12,7	25	9	0,1	12
11	8	0,05	12,7	26	9	0,05	12
12	8	0,05	12,7	27	9	0,05	12,3
13	8	0,09	12,5	28	9	0,12	12,2
14	8	0,05	12,5	29	8	0,1	12
15	9	0,05	12,2	30	8	0,1	12

## Лабораторна робота № 10

### Тема: Динамічне програмування

**Мета роботи:** Набути навичок розв'язання математичної моделі задач динамічного програмування з використанням табличного процесору Excel.

#### 1) Теоретичні рекомендації

Розглянемо застосування методу динамічного програмування на прикладі розподілу капіталовкладень між чотирма підприємствами. Нехай загальна сума коштів, що інвестуються в розвиток складає не більш 5-ти мільйонів гривень. На основі техніко-економічних розрахунків встановлено, що в результаті реконструкції у залежності від кількості витрачених коштів підприємства будуть мати продуктивність, приведена в табл.10.1. Необхідно визначити оптимальний розподіл коштів між підприємствами, що забезпечує максимальне збільшення продуктивності підприємств. Таким чином, у цій оптимізаційній задачі використовується критерій - сумарна продуктивність підприємств.

Таблиця 10.1

№ підприємства	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	0	1	2	3	4	5
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
1	400	500	550	700	750	1000
2	4000	4200	4300	4500	4600	4700
3	0	100	400	800	850	900
4	600	750	900	950	1100	1200

Нехай  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — капіталовкладення в розвиток відповідно першого, другого, третього й четвертого підприємства,  $0 \leq x_i \leq 5, i = 1, 4$ . Позначимо  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$  — функції зміни продуктивності першого, другого, третього і четвертого підприємства при вкладенні в їхній розвиток  $x$  млн. грн. Цим функціям відповідають рядки 1, 2, 3, 4 у табл. 10.1.

Визначимо максимум функції цілі

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) \rightarrow \text{MAX}$$

При цьому на капіталовкладення  $x_1, x_2, x_3, x_4$  накладені обмеження

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = A,$$

$$A = 0,5 \text{ млн. грн.}$$

В основі методу динамічного програмування, використовуваного для розв'язання поставленої задачі, лежить принцип оптимальності.

**Відповідно до цього принципу, обравши деякий початковий розподіл ресурсів, виконуємо багатокрокову оптимізацію, причому на найближчому кроці**

**вибираємо такий розподіл ресурсів, щоб він у сукупності з оптимальним розподілом на всіх наступних кроках призводить до максимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний.**

Виділимо в нашій задачі 3 кроки.

1. А млн. грн. вкладаються в перші, друге підприємства одночасно;
2. А млн. грн. вкладаються в перше, друге, третє підприємства разом;
3. А млн. грн. вкладаються в чотири підприємства одночасно.

Позначимо  $F_{1,2}(A)$ ,  $F_{1,2,3}(A)$ ,  $F_{1,2,3,4}(A)$  відповідно умовно оптимальні розподіли коштів для першого, другого і третього кроків.

Алгоритм методу динамічного програмування складається з двох етапів. На першому етапі виконується умовна оптимізація, що полягає в тому, що для кожного з трьох кроків знаходять умовний оптимальний виграш  $F_{1,2}(A)$ ,  $F_{1,2,3}(A)$ ,  $F_{1,2,3,4}(A)$  для  $A = \overline{1,5}$ . На другому етапі виконується безумовна оптимізація. Використовуючи результати першого етапу, знаходять величини капіталовкладень у розвиток підприємств  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , що забезпечують максимальну продуктивність групи підприємств.

Перший етап включає такі кроки:

1) Обчислення максимуму критерію оптимізації для різноманітних значень капіталовкладень  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , що використовуються тільки для підприємств 1 і 2. Розрахунок ведеться за формулою

$$F_{1,2}(A) = \max [ f_1(x) + f_2(A - x) ];$$

$$0 \leq x \leq 5;$$

$$0 \leq A \leq 5.$$

Результати розрахунку подані в табл. 10.2.

Таблиця 10.2

$x_2 = A - f_1(x)$		$x_2 = A - x$					
		0	1	2	3	4	5
		$f_2(A - x)$					
		400	4200	4300	4500	4650	4700
0	400	4400	<u>4000</u>	<u>4700</u>	<u>4900</u>	<u>5050</u>	5100
1	500	4500	<u>4700</u>	4800	5000	<u>5150</u>	
2	550	4550	4750	4850	5050		
3	700	4700	4900	5000			
4	750	4750	4950				
5	1000	5000					

Наприклад, для того, щоб визначити  $F_{1,2}(2)$ , треба обчислити

$$f_1(2) + f_2(0) = 550 + 4000 = 4550;$$

$$f_1(1) + f_2(1) = 500 + 4200 = 4700;$$

$$f_1(0) + f_2(2) = 400 + 4300 = 4700.$$

Найбільше з отриманих значень буде  $F_{1,2}(2)$ . Інші  $F_{1,2}(x)$  одержуються як найбільше значення кожної діагоналі в таблиці (ці значення в таблиці підкреслені).

$$F_2(0) = 4400; F_2(1) = \max(4600, 4500) = 4600;$$

$$F_2(2) = \max(4550, 4700, 4700) = 4700;$$

$$F_2(3) = \max(4700, 4750, 4800, 4900) = 4900;$$

$$F_2(4) = \max(4750, 4900, 4850, 5000, 5050) = 5050;$$

$$F_2(5) = \max(5000, 4950, 5000, 5050, 5100, 5100) = 5100.$$

2) Обчислення максимуму критерію оптимізації для різноманітних значень капіталовкладень  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , що використовуються тільки для підприємств 1,2 і 3.

Розрахунок ведеться за формулою

$$F_{1,2,3}(A) = \max [ F_{1,2}(A) + f_3(A - x) ];$$

$$0 \leq x \leq 5;$$

$$0 \leq A \leq 5.$$

Результати розрахунків занесемо в табл. 10.3, що аналогічна табл. 2, тільки замість  $f_1(x)$  у ній указані значення  $F_2(A)$ , а  $f_2(A - x)$  замінена на  $f_3(A - x)$ .

Таблиця 10.3

A	$F_{1,2}(A)$	$x_3 = A - x$					
		0	1	2	3	4	5
		$f_3(A - x)$					
		0	100	400	400	850	900
0	4400	4400	4500	4800	<u>5250</u>	5250	5300
1	4600	<u>4600</u>	4700	5000	<u>5400</u>	5450	
2	4700	4700	4800	5100	<u>550</u>		
3	4900	4900	5000	5300			
4	5050	5050	5250				
5	5150	5150					

Значення  $F_{1,2,3}(A)$  будуть такими:

$$F_{1,2,3}(0) = 4400; \quad F_{1,2,3}(1) = 4600; \quad F_{1,2,3}(2) = 4800;$$

$$F_{1,2,3}(3) = 5200; \quad F_{1,2,3}(4) = 5400; \quad F_{1,2,3}(5) = 5500.$$

3) Обчислення максимуму критерію оптимізації для різноманітних значень капіталовкладень  $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , що використовуються для всіх підприємств.

Розрахунок ведеться за формулою

$$F_{1,2,3,4}(A) = \max [ F_{1,2,3}(A) + f_4(A - x) ];$$

$$0 \leq x \leq 5;$$

$$0 \leq A \leq 5.$$

Результати розрахунків заносимо в табл. 10.4.

Таблиця 10.4

A	$F_{1,2,3}(A)$	$x_4 = A - x$					
		0	1	2	3	4	5
		$f_4(A - x)$					
		600	750	900	950	1100	1200
0	4400	<u>5000</u>	5150	5300	5350	5500	5600
1	4600	<u>5200</u>	5350	5500	5550	5700	
2	4800	5400	5550	5700	5750		
3	5200	<u>5800</u>	5950	6100			
4	5400	<u>6000</u>	<u>6150</u>				
	5500	6100					

Значення  $F_{1,2,3,4}(A)$  у результаті розрахунку будуть такими:

$$F_{1,2,3,4}(0) = 5000;$$

$$F_{1,2,3,4}(1) = 5200;$$

$$F_{1,2,3,4}(2) = 5400; \quad F_{1,2,3,4}(3) = 5800;$$

$$F_{1,2,3,4}(4) = 6000; \quad F_{1,2,3,4}(5) = 6150.$$

На цьому перший етап розв'язання задачі динамічного програмування закінчується. Перейдемо до другого етапу розв'язання задачі динамічного програмування – безумовної оптимізації. На цьому етапі використовуються табл. 10.4, 10.3, 10.2. Визначимо оптимальні капіталовкладення в розвиток підприємств для  $A = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Для цього виконаємо наступні розрахунки.

Нехай обсяг капіталовкладень, виділених на розвиток підприємств, складає  $A = 5$  млн. грн. Визначимо обсяг капіталовкладень на розвиток четвертого підприємства. Для цього використовуємо табл. 10.4. Виберемо на ній діагональ, що відповідає  $A = 5$  — це значення 6100, 6150, 6100, 5750, 5700, 5600, з цих чисел візьмемо максимальне  $F_{1,2,3,4}(5) = 6150$  тис. т. Відзначаємо стовпчик, у якому стоїть ця величина. Далі визначаємо у відзначеному стовпчику обсяг капіталовкладень у четверте підприємство  $x_4 = 1$ .

На розвиток першого, другого і третього підприємств залишається  $A = 5 - x_4 = 4$  млн. грн.

Визначимо обсяг капіталовкладень, виділених на розвиток третього підприємства. Для цього використовуємо табл. 10.3. Виберемо в цій таблиці діагональ, що відповідає  $A = 4$  — це значення 5050, 5000, 5100, 5400, 5200. Відзначаємо стовпчик, у якому стоїть максимальна (підкреслена) величина продуктивності  $F_{1,2,3}(4) = 5400$  тис. т. Визначаємо значення  $x_4 = 3$  млн. грн. у відзначеному стовпчику.

На розвиток першого й другого підприємства залишається сума  $A = 5 - x_4 - x_3 = 1$  млн. грн.

Визначимо обсяг капіталовкладень на розвиток другого підприємства. Використовуємо для цього табл. 10. 2. Виберемо в таблиці діагональ, що відповідає  $A = 1$  — це значення 4500, 4600. Відзначаємо стовпчик із максимальною величиною продуктивності  $F_{1,2}(1) = 4600$  тис. т. Тоді в цьому стовпчику  $x_2 = 1$  млн. грн.

Визначимо обсяг капіталовкладень на розвиток першого підприємства. Тому що виділені капіталовкладення вичерпані  $x_2 + x_3 + 1 + x_4 = 5$ , то на розвиток першого підприємства кошти не виділяються.

Таким чином, для капіталовкладень обсягом  $A = 5$  млн. грн. оптимальним є вкладення в розвиток другого підприємства 1 млн. грн, третього 3 млн. грн., четвертого 1 млн. грн., у розвиток першого підприємства кошти не виділяються. При цьому сумарна продуктивність чотирьох підприємств складе 6150 тис. т.

Повторивши розрахунки другого етапу розв'язання для  $A = 4, 3, 2, 1, 0$ , визначимо оптимальні капіталовкладення в розвиток підприємств. Результати будуть наступними:

$F_{1,2,3,4}(4) = 6000;$	$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 3; x_4 = 0;$
$F_{1,2,3,4}(3) = 5800;$	$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 3; x_4 = 0;$
$F_{1,2,3,4}(2) = 5400;$	$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 2; x_4 = 0;$
$F_{1,2,3,4}(1) = 5200;$	$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 0;$
$F_{1,2,3,4}(0) = 5000;$	$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 3; x_4 = 0.$

Таким чином задача розв'язана й знайдене оптимальне розв'язок для всіх варіантів капіталовкладень

### Варіанти завдань

№ підприємства	кошти, що вкладені в розвиток (млн. грн.)					
	0	1	2	3	4	5
	Продуктивність у результаті розвитку (тис. т.)					
1	4m0	500	550	700	750	1n00
2	4000	42n0	4300	4500	4m00	4700
3	0	100	4m0	800	850	900
4	600	750	900	9n0	1100	1200

n - остання цифра номера залікової книжки студента;

m - передостання цифра номера залікової книжки студента.