Міністерство освіти і науки України

Національний гірничий університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

З САМОСТІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ СТУДЕНТІВ
ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 7.050102 “ЕКОНОМІЧНА КІБЕРНЕТИКА”
ПО ДИСЦИПЛІНІ
«АКТУАРНІ РОЗРАХУНКИ»

Дніпропетровськ
2002

Методичні вказівки з самостійної підготовки студентів зі спеціальності 7.050102 “Економічна кібернетика” по дисципліні “Актуарні розрахунки”/ упорядник І.М.Пістунов. – Дніпропетровськ: НГУ, 2002.- 143 с.

Автор
І.М.Пістунов, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний за випуск завідувач кафедрою економічної кібернетики та інформаційних технологій Е.В.Кочура, докт.. техн. наук, професор

ЗМІСТ

Розділи Стор.

Розділи	Стор.

Розділи Стор.

1. ВСТУП

1.1. Історична довідка про виникнення страхування та терміну “актуарій”

Страхування життя являє собою типовий приклад довгострокової фінансової операції, де фактор часу відіграє вирішальну роль. Відмінність фінансових операцій по страхуванню життя від звичайних фінансових операцій у тім, що виплати виробляються тільки при настанні страхової події, що носить випадковий характер. Опис фінансових операцій, що носять імовірний характер, є предметом актуарної математики, що одержав свою назву від терміна "актуарій". У сучасному розумінні актуарій — це людина, що має визначену кваліфікацію для оцінки ризиків і ймовірностей в області фінансів і бізнесу, зв'язаної з випадковими подіями.

Цікаво, що у своєму первісному значенні зазначений термін не мав майже нічого загального зі своїм тлумаченням. Актуарієм *(actuarius)* у Древньому Римі називалася офіційно призначена людина, що записував рішення Сенату і щодня вів у ньому запису дебатів. Наскільки відомо, уперше термін "актуарій" ужитий стосовно бізнесу в 1762 р., коли в Лондоні було сформоване “Товариство справедливого страхування життя й виживання”. Документ партнерства визначав, що головну посадову особу Товариства треба називати актуарієм. Ця назва була обрана Эдвардом Роу Моресом, главою групи, що заснувала Товариство, і відбивало любов Мореса до латині. Однієї з головних обов'язків головної посадової особи була реєстрація контрактів, пов'язаних з Товариством, — задача, що має деяку подібність з роллю актуаріїв у записі рішень Сенату в Древньому Римі.

В перші роки існування Товариства посада актуарія була більш те саме що посада секретаря компанії, що відповідав за протоколи засідань і накази Ради директорів і загальних збори Товариства, а також повинний був крім розрахунків вести книги Товариства, бухгалтерський облік надходжень і виплат. У 1775 р. на цю посаду був призначений математик (Вільям Морган), що обмежив сферу своєї діяльності обчисленням прийнятних ставок страхових внесків і забезпеченням надійності фінансових операцій Товариства. З тих пір назва "актуарій" стало застосовуватися для тих. хто виконував цю фінансову й математичну роботу. Термін "актуарій" був уперше використаний у законодавстві Великобританії в 1819 р.

Основи теорії актуарних розрахунків були закладені в XVII в. роботами вчених Д. Граунта, Яна де Вітта, Э. Галлея. У 1662 р. була опублікована робота англійського вченого Д. Граунта “Природні й політичні спостереження, зроблені над бюлетенем смертності”. Він перший обробив дані про смертність людей і побудував таблиці смертності. У цей же час голландський учений Ян де Вітт опублікував роботу про тарифи по страхуванню довічної ренти, де виклав метод числення страхових внесків у залежності від віку застрахованого і норми росту грошей. Подальший розвиток теорія актуарних розрахунків одержала в роботах англійського астронома і математика Э. Галлея. Він дав визначення основних таблиць смертності. Запропонована Э. Галлеем форма таблиць застосовується дотепер. На розроблену їм методику спираються сучасні прийоми розрахунків тарифів по страхуванню життя й пенсій. В даний час у теорії актуарних розрахунків застосовуються новітні досягнення математики й статистики.

Актуарії традиційно відігравали головну роль у страхуванні життя. Комбінування смертності, що моделюється, й ймовірностей виживання з розумінням фінансової математики було серцевиною раннього розвитку професії.

У більш пізній період актуарії стали брати участь і в страхуванні, що не відноситься до страхування життя (страхування майна, судів, відповідальності, від нещасливих випадків, короткочасної непрацездатності і т.п.). Актуарна робота в області страхування, що не відноситься до страхування життя, вимагає більш складної математики й статистики через присутність більшої невизначеності

У багатьох країнах актуарії також активно діють в області фінансів і інвестицій, будь то керування інвестиційним портфелем, дослідження і технічне дублювання керування фондами і брокерами фондової біржі, вимір і моніторинг інвестиційного виконання, керування зв'язком між доходами і чи витратами аналіз сучасних фінансових інструментів (наприклад, опціонів, купонів і фьючерсів). У деяких країнах (Франція й Бельгія) актуарії відіграють значну роль у банківському й іншому не страховому фінансовому інститутах.

1.2. Роль страхування в залученні інвестицій

В страховій діяльності одним з її важливим елементом є створення фондів, з яких провадиться компенсація по страховим випадкам. Ці суми можуть бути використані для інвестицій, що забезпечує додаткові прибутки страхових підприємств, а з іншого – підвищує надійність їх діяльності, імовірність відшкодування втрат. Розглянемо джерела надходжень страхових внесків на Україні.

Добровільним страхування виступає переважно лише відносно страхувальника. Саме цей суб'єкт страхового ринку вибирає, оцінює, порівнює варіанти та надає перевагу запропонованим страховиком умовам страхування. Це страхування обмежене в часі. Воно триває тільки протягом дії підписаного страховиком і страхувальником договору. Для продовження дії добровільного страхування необхідно переукласти страховий договір на новий термін часу. Важливою передумовою дії договору добровільного страхування є своєчасна сплата обумовленої договором страхової премії. Відмова від сплати страхової премії в означений страховим договором термін часу може спричинити припинення дії договору.

Про співвідношення добровільної та обов'язкової форми страхування на страховому ринку України свідчать дані рис. 1.

Як видно з наведених даних, в Україні спостерігається досить стійка тенденція переваги добровільного страхування над обов'язковим. Частка добровільного страхування тримається на рівні, не меншому 74 % . Якщо у 1995р. вона становила 80,2 %, в 1996р. — 74,0 %, то у 1997р. — 76,5 %. Дану тенденцію можна характеризувати як позитивне явище, що відбиває розвиток страхового бізнесу в Україні, і свідчить не тільки про зростання потреби у страховому захисті, але і про наявність певних можливостей у страхувальників в їх задоволенні.

Разом з тим, досить вагомою для страхового ринку України залишається частка обов'язкового страхування. Так, у 1995 р. вона сягала 19,8% , в 1996р. — 26,0% , а в 1997р. — 23,5% . Така стабільність та вагомість частки обов'язкового страхування у загальному обсязі страхових платежів свідчить про важливість і цієї форми страхування, особливо коли економіка

Економічна наука виділяє специфічні форми, розглядає різноманітні види страхування. Дослідивши найвагоміші особливості, що характеризують форми страхування, важливо визначити і критерії, що характеризують різноманітні види страхування, адже саме види страхування свідчать про рівень насиченості страхового ринку страховими послугами. Для прикладу зазначимо, що у США кількість страхових послуг, що надаються різними видами страхування, перевищує 3000, в країнах Європейського Союзу цей показник досягає

500, в той час як в Росії — 60, а в Україні лише 46 (див. Рис. 2)

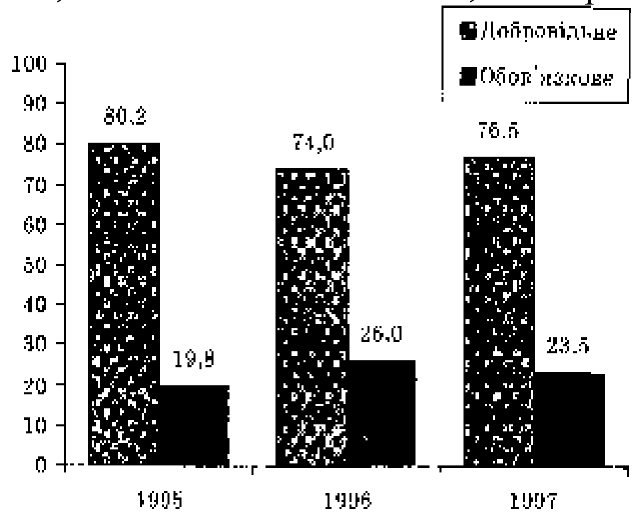


Рис. 1. Частка добровільного та обов'язкового страхування у загальному обсязі страхових платежів, %

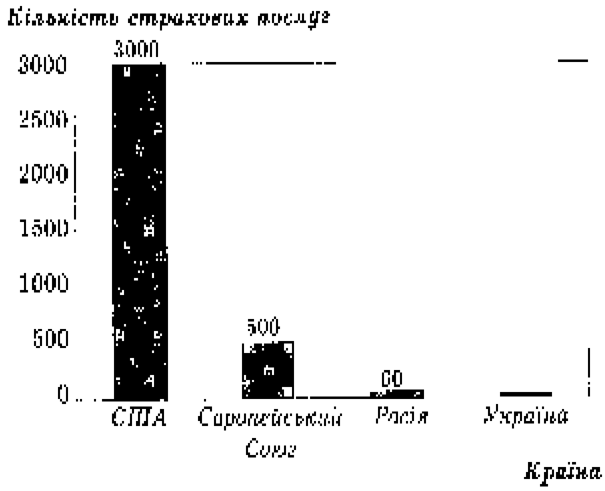


Рис. 2 Кількість страхових послуг

Суттєво збільшились страхові резерви: у 1995 р. вони дорівнювали 65,2 тис.. грн., а в 1997 р. перевищили грн. ніж у 135 тис.. грн. Спостерігалось зростання обсягів заявлених статутних фондів, збільшились також сплачені статутні фонди (вони зросли більш ніж у два рази).

Досить стійкою була тенденція збільшення балансового прибутку страховиків. У цілому він зріс з 25,0 тис.. грн. у 1995 р. до більш як 60 тис.. грн. у 1997 р. При цьому важливо зазначити, що ***у балансовому прибутку страховиків дуже велику частку займає прибуток, отриманий від інвестиційної діяльності страховика з тимчасово вільними коштами.***

У 1995 р. балансовий прибуток, отриманий страховиками за рахунок тимчасово вільних коштів, суттєво перевищив прибуток від самої страхової діяльності. Дані статистичних досліджень переконують у тому, що страховий ринок являє собою великий інвестиційний потенціал і діяльність страховиків тим ефективніша, чим раціональніше вони використовують свої інвестиційні ресурси.

Ось деякі приклади щодо цього. Так, балансовий прибуток, страхових організацій України за 9 місяців 1997 р. склав 67 217 тис.. грн. (з них за рахунок інвестування тимчасово вільних коштів — 22 617 тис.. грн.), або 33,6% від загальної суми одержаного прибутку. Отже, за цей час 158 страховиків України одержали прибуток (або 72,1% від усіх, хто подав звіт). Водночас 58 страховиків одержали збитки.

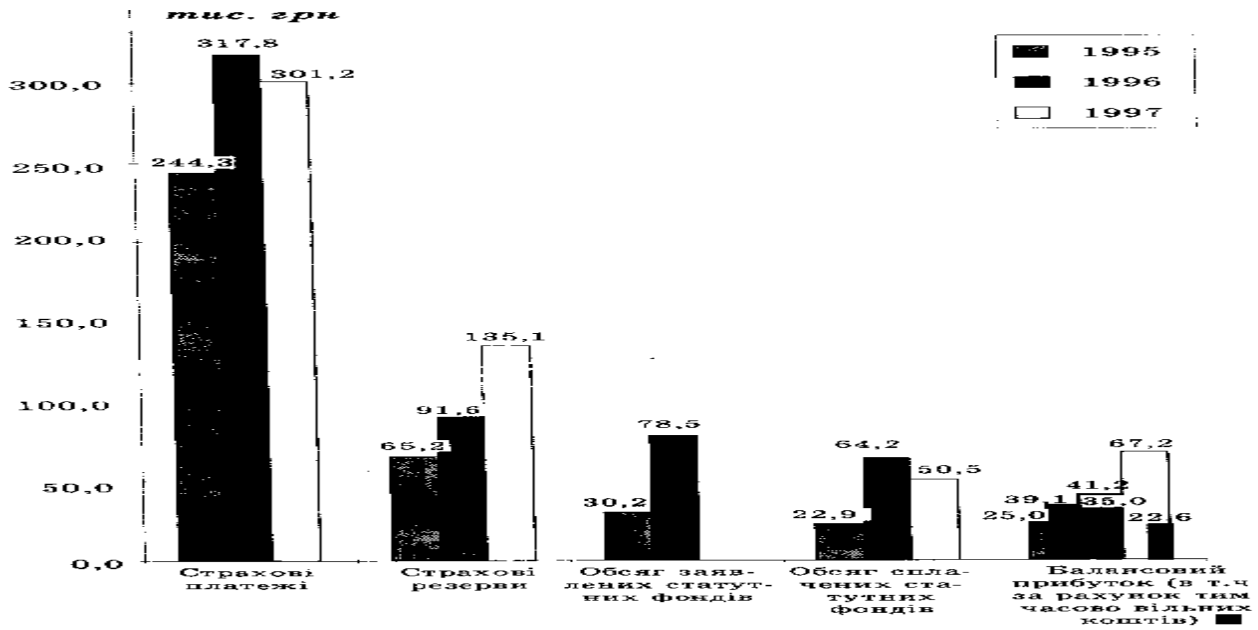


Рис. 3. Динаміка складових інвестиційного потенціалу страховиків України у 1995—1997 рр. *Розраховано за донними Комітету в справах нагляді/ за страховою діяльністю*

1.3. Предмет актуарних розрахунків

Актуарні розрахунки являють собою процес, у ході якого визначаються витрати, необхідні на страхування даного об'єкта. За допомогою актуарних розрахунків визначаються собівартість і вартість послуги, що робиться страховиком страхувальнику. У більш узагальненій формі актуарні розрахунки можна представити як систему математичних і статистичних закономірностей, що регламентують взаємини між страховиком і страхувальниками. За допомогою актуарних розрахунків визначається частка участі кожного страхувальника в створенні страхового фонду, тобто визначаються розміри тарифних ставок.

Визначення витрат, необхідних на страхування даного об'єкта, — один з найбільш складних і відповідальних моментів у діяльності страховика. Форма, у якій обчислені витрати на проведення даного страхування, називається *страховою (актуарною) калькуляцією*.

Роль актуарної калькуляції може бути розглянута в різних аспектах: з одного боку, вона дозволяє визначити собівартість послуги, що робиться страховиком, а з іншого боку — через неї створюються умови для всебічного аналізу і розкриття причин економічних, фінансових і організаційних чи успіхів недоліків у діяльності страховика.

Актуарна калькуляція дозволяє визначити страхові платежі до договору. Величина пред'явлених до сплати страхових платежів припускає вимір прийнятого ризику страховиком. До складу актуарної калькуляції входить також обчислення суми частки чи витрат на ведення справи по обслуговуванню договору страхування.

В актуарних розрахунках варто передбачати деякі особливості, зв'язані з практикою страхової справи. Найбільш важливі з них наступні:

• події, що піддаються оцінці, мають імовірний характер. Це відбивається на величині пред'явлених до сплати страхових платежів;

• в окремі роки загальна закономірність явища виявляється через масу відособлених випадкових подій, наявність яких припускає значні коливання в страхових платежах, пред'явлених до сплати;

• числення собівартості послуги, що робиться страховиком, виробляється у відношенні всієї страхової сукупності;

• необхідне виділення спеціальних резервів, що знаходяться в розпорядженні страховика, визначення оптимальних розмірів цих резервів;

• прогнозування сторнування договорів страхування, експертна оцінка їхньої величини;

• дослідження норми позикового відсотка і тенденцій його зміни в конкретному часовому інтервалі;

• наявність повного чи часткового збитку, зв'язаного зі страховим випадком, що визначає потребу виміру величини його розподілу в часі і просторі за допомогою спеціальних таблиць;

• дотримання принципу еквівалентності, тобто встановлення адекватної рівноваги між платежами страхувальника, вираженими через страхову суму, і страховим забезпеченням, наданим страховим Товариством, завдяки отриманим страховим платежам;

• виділення групи ризику в рамках даної страхової сукупності.

Основними задачами актуарних розрахунків є наступні:

• дослідження й угруповання ризиків у рамках страхової сукупності, тобто виконання вимоги наукової класифікації ризиків з метою створення гомогенної підсукупності в рамках загальної страхової сукупності;

• числення математичної імовірності настання страхового випадку, визначення частоти і ступеня ваги наслідків заподіяння збитку як в окремих ризикових групах, так і в цілому по страховій сукупності;

• математичне обґрунтування необхідних витрат на ведення справи страховиком і прогнозування тенденцій їхнього розвитку:

• математичне обґрунтування необхідних резервних фондів страховика, пропозиція конкретних методів і джерел їхнього формування.

Питання актуарних розрахунків (АР) займають центральне місце в діяльності будь-якого страховика. **Значення актуарних розрахунків** визначається тим, що страховик, як правило, проводить ряд різних по змісту і характеру видів страхування, що вимагають адекватного математичного виміру узятих по договорах зобов'язань. При численні страхових внесків і страхових виплат їхні розміри повинні варіюватися в різних ієрархічних структурах (у цілому для республіки, по окремих регіонах, районам, селищам, організаціям і т.п.) з різними умовами ризикових ситуацій у часі і просторі.

Істотне значення при проведенні актуарних розрахунків має і та обставина, що при майновому страхуванні мається дуже **великий розкид в обсягах**

нанесеного збитку при настанні страхових випадків (наприклад, вартість домашнього майна, дач і вартість невдалих космічних запусків, пожежі і т.п.). У цьому випадку **в актуарних розрахунках повинна визначатися ризикова надбавка,** чого не робиться, скажемо, при страхуванні життя, на дожиття, пенсії, тому що в цих випадках страхові суми порівняно невеликі.

Актуарні розрахунки прийнятий класифікувати по наступним ознаках:

а) видам страхування;

б) часу складання (планові і звітні);

в) ієрархічній ознаці: загальні (для всієї країни), зональні (для регіонів), територіальні (район, селище, турбаза і т.п.).

У практиці актуарних розрахунків широко використовується страхова статистика, що являє собою систематизоване вивчення й узагальнення найбільш масових і типових страхових операцій, вартісних показників, що характеризують страхову справу.

При цьому - чим більше число об'єктів спостереження, тим точніше оцінка імовірності настання того чи іншого випадку, тому що тільки у великій сукупності вибірок діє і дає прийнятні результати "закон великих чисел" (мінімальне число "проб" і "помилок" повинне бути не менш десяти для одержання прийнятного результату).

У найбільш узагальненому виді, що має практичний додаток, страховий статистику можна звести до аналізу наступних показників:

N - число об'єктів страхування (кількість укладених договорів);

К - число страхових подій;

М - число страхових випадків;

SCg - сукупна сума страхових виплат;

SCc - сукупна страхова сума;

З - страхова сума об'єкта страхування.

Розрахунковим показником страхової статистики є частота (частість) страхових подій - це співвідношення між числом страхових подій і числом застрахованих об'єктів.

Математично це співвідношення виражається імовірністю настання, скажемо, події ***К*** при відношенні числа сприятливих для нього випадків ***М*** к загальному числу рівноімовірних випадків ***N***. Оскільки імовірність завжди виражається правильним дробом (чисельник менше знаменника), те імовірність ***Р*** події ***К*** завжди буде відповідати вираженню $0 \leq P(K) \leq 1$. Якщо імовірність події досягає крайніх значень (0 чи I), то страхування на випадок настання даної події проводитися не може. Страхові відносини складаються тільки тоді, коли заздалегідь невідомо, відбудеться за даний період часу страховий випадок по даній страховій чи події ні.

У теорії ймовірностей відношення числа елементарних виходів, сприятливих події ***К***, до їхнього загального числа називають імовірністю події ***К*** і позначають ***Р(К)***.

Відношення числа іспитів, у яких подія ***К*** з'явилося ***М*** раз, до загального числа фактично зроблених іспитів ***N*** називають відносною частотою ***F*** події ***K***:

$$F(K) = \frac{M}{N}. \tag{1}$$

1.4. Поняття і характеристики ризику в страхуванні

Слово **"ризик"** у буквальному перекладі означає "ухвалення рішення", результат якого заздалегідь не відомий. Ризик - це щось, що може відбутися, а може і не відбутися. Ризик - це дія навмання (у надії на щасливий результат).

По своїй сутності ризик є подією з негативними наслідками. Це гіпотетична можливість настання збитку В зв'язку з цим існує точка зору, відповідно до якої про ризик можна говорити тільки тоді, коли існує відхилення між плановими і фактичними результатами. Дане відхилення може бути або позитивним, або негативним. Можливість позитивного відхилення при вихідних заданих параметрах (умовах) на одне очікуване явище зветься "шанс". У цьому випадку можна говорити про **шанс на прибуток.** При негативному відхиленні - з поняттям "ризик" тісно зв'язаний поняття **збиток.**

Через ризик реалізується збиток, здобуваючи конкретно вимірювані і реальні обриси. Інакше - це кількісна оцінка (критерій) невдалого результату. Вимір ризику можливо математичним шляхом за допомогою застосування теорії ймовірностей і закону великих чисел на основі статистичних даних.

Фактор ризику і необхідність покриття можливого збитку викликають потреба в страхуванні. Тобто **передумовою виникнення страхових відносин служить ризик.**

Ризик - це конкретне чи явище сукупність явищ (страхова чи подія сукупність подій), потенційна можливість заподіяння збитку об'єкту страхування. Наприклад, страховими подіями при змішаному страхуванні життя є: страхування на випадок хвороби, від нещасливого випадку і на випадок смерті. У цьому зв'язку в умовах договору потрібно абсолютно точне формулювання страхової події, що включається в обсяг відповідальності страховика. При його реалізації (настанні страхового випадку) страховик зобов'язаний зробити страхову виплату страхувальнику у виді страхового чи забезпечення відшкодування. Наприклад, здійснюючи страхування майна туристів, варто точно вказати, яке майно, на яку суму, від якого ризику (події) воно страхується (від крадіжки, поломки в зв'язку зі стихійними лихами, псування від пожежі і т.п.).

За своїм характером **ризики підрозділяються на наступні категорії:** об'єктивні і суб'єктивні, індивідуальні й універсальні, специфічні, екологічні, транспортні, політичні, технічні і т.п.

Об'єктивні ризики не залежать від свідомості і волі страхувальника (стихійні лиха, землетруси, повені і т.п.).

Суб'єктивні ризики засновані на чи запереченні ігноруванні об'єктивного підходу до дійсності.

Індивідуальний ризик виражається в ігноруванні страхування індивідуального домашнього майна, картин, колекцій і т.п.

Універсальний ризик - це ризик, що включається в обсяг відповідальності страховика по більшості договорів. Наприклад, страхування туристів від нещасливих випадків і хвороб, крадіжки майна і т.п.

Особливу групу складають **специфічні ризики:** аномальні і катастрофічні.

До числа **аномальних ризиків** відносяться ті, котрі не дозволяють віднести відповідні об'єкти до тих чи інших груп страхування. Наприклад, індивідуальне страхування життя, процедура медичного огляду, страхування на випадок "поганої погоди", "не реалізації ліцензій на відстріл диких тварин і звірів" і ін.

Катастрофічними ризиками є ризики, що можуть при їхньому настанні принести значний збиток страхувальнику й в особливо великих розмірах (аварія на ЧАЕС, землетрус на Південному Сахаліні й ін.).

Екологічні ризики зв'язані з забрудненням навколишнього середовища, а транспортні - мають на увазі страхування засобів повітряного, наземного, залізничного і водяного транспорту.

Політичні, чи репресивні ризики, зв'язані з протиправними діями з погляду норм міжнародного права, чи заходами акціями урядів іноземних держав у відношенні іншої чи держави громадян суверенної держави.

Технічний ризик страховика в теоретичному плані представляє ризик, зв'язаний зі здійсненням страхування. Наявність технічного ризику страховика спонукує його активно брати участь в організації попереджувальних заходів з метою зниження ступеня імовірності настання страхового випадку. Наприклад, організація попереджувальних заходів при страхуванні промислових підприємств, різного роду складів, мисливських турів, рибного лову і т. п.

Усі ринкові обставини, узяті в єдності і взаємодії, визначають стан, що називається ситуацією, чи **загальною ставкою ризику.** Ситуація ризику характеризує стан об'єктів страхування й обстановку, у якій вони знаходяться. **Загальна ставка ризику визначається як сума приватних ризиків.**

Страховий інтерес варто розглядати як майновим, опосередкованим деяким грошовим еквівалентом, тобто грошовою сумою, що відповідає цьому інтересу.

Важливо мати на увазі наявність страхування ризику (insurable risk), тобто ризик повинний мати характерні риси, що дозволяють страховим компаніям пропонувати покриття такого ризику, а саме:

- наявність великої кількості одиниць, підданих ризику;
- випадковий характер утрат;
- некатастрофічний характер утрат;
- можливість розрахунку імовірності втрат;
- невисока страхова премія.

З цих позицій варто розглядати будь-які проекти, що передбачають забезпечення страхового захисту яких-небудь майнових інтересів.

Характерною рисою ризикових видів страхування є їхня короткочасність і непередбачуваність величини збитку. Наприклад, при страхуванні туристів від нещасливих випадків, чи хвороби смерті (загибелі) важко сказати заздалегідь, що може відбутися з туристом і які можуть бути наслідку страхового випадку.

Випливає, однак, відзначити, що поряд з **ризиковими** видами страхування в практиці часто застосовуються і **накопичувальні** (довгострокові чи ощадні) види.

При накопичувальному виді страхування виробляється на тривалий термін і, як правило, заздалегідь визначається страхова сума, що чи страхувальник застрахований одержить після закінчення терміну чи договору настанні страхового випадку. Наприклад, при страхуванні пенсії, на дожиття, на випадок смерті й ін. у договорі відразу обмовляються всі умови страхування, що потім забезпечуються страховиком при настанні визначеного страхового чи випадку закінчення терміну дії договору.

Взаємна обумовленість поміж ризиком та прибутком досягається за умови об'єктивного порівняння страховиком показників ризику та розмірів прибутковості від страхової та інвестиційної діяльності (рис.4). Встановлюючи точку оптимальності (ризик—прибуток) у зоні І (т. A_1), страховик бере на себе незначний ризик (P_1), але в той же час він не має надійних гарантій отримати мінімально необхідний прибуток (П), що може призвести до економічних ускладнень в майбутньому.

Обираючи точку оптимуму (ризик — прибуток) у зоні II (т. С), страховик бере на себе надмірний ризик, і ймовірність отримання прибутку (т. П„) стає для нього надто невизначеною, а отже рівень ризику для страховика у зоні II (т. P_3) найбільший, а це, по суті, унеможливлює, зводить нанівець його діяльність за таких стартових умов проведення страхових операцій. Зона критичного ризику II має такий рівень ризику, за якого страхова компанія може втратити увесь валовий прибуток. У зоні II страхова компанія може проводити інвестиційну діяльність в певних галузях економіки, купувати цінні папери акціонерних товариств, нерухомість. Дії страхової компанії у зоні критичного ризику мають обмежене поле, вимагають оперативного аналізу і серйозних моніторингових спостережень та маркетингових досліджень, що необхідні для прийняття рішень, адекватно реагуючих на зміну фінансових показників, кон'юнктури ринку. Саме у цій зоні рівень ризику настільки високий, а вірогідність його прояву така значна.

Управління ризиком — процес, що визначається специфікою певного ризику. На вибір методів управління ризиком впливають і такі фактори, як наявність коштів, досвід та кваліфікація працівників, важливість виходу на ринок страхових послуг чи утримання на ньому своїх позицій, або розширення їх меж.

При визначенні методів обмеження ризику необхідно зіставляти витрати з рівнем обмеження ризику (див. рис. 5).

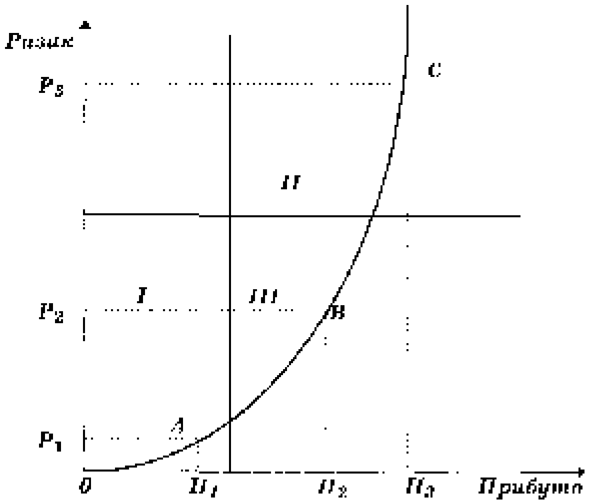


Рис. 4. **Взаємозумовленість прибутку та ризику**

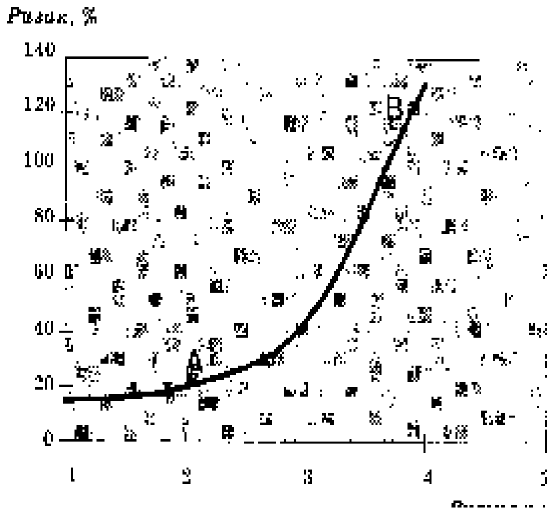


Рис. 5. Залежність ризику від витрат

Крива АВ показує, що після певного рівня витрат процент зменшення ризику стає дуже вагомим. Отже, витрати на обмеження ризику можуть давати високий ефект, важливо лише достовірно визначити обсяги та спрямованість витрат. Так, наприклад, витрати на комп'ютеризацію та підготовку висококваліфікованих фахівців-бухгалтерів, аудиторів може значно зменшувати ризик втрати коштів від помилок та розкрадання матеріальних цінностей. Безумовно, сама комп'ютеризація не захищає від втрат повністю (уже стало відчутним явище хакерів — електронних злодіїв), але суттєво обмежує поле ризику, сприяє упорядкуванню бази оподаткування, інтенсифікації оперативності розрахунків, проведенню у будь-який момент перевірки.

Саме ці ризики можуть з найбільшою вірогідністю відбутися і призводити до реальної шкоди матеріальним інтересам страхувальників.

2. АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ СТРАХОВОГО ПІДПРИЄМНИЦТВА

Різниця між доходами та видатками утворює прибуток (збиток) страховика від страхової діяльності. На основі цих даних (табл. 1.) проведено розрахунок системи показників ефективності страхової діяльності страхових компаній на страховому ринку України, використавши нижче наведені формули. За першою з них можна показати рівень доходності витрат страхових компаній (ДВ):

$$\textbf{ДВ} = \frac{\textbf{Доход}}{\textbf{Витрати}}. \qquad (2)$$

За другою — вирахувати маржу прибутку страхових компаній (***М***):

$$\textbf{М} = \frac{\textbf{Прибуток}}{\textbf{Доход}} \qquad (3)$$

Третя формула допомагає показати рівень прибутковості витрат страхових компаній України ***(ПВ):***

$$ПВ = \frac{Прибуток}{Витрати} \quad (4)$$

2.1. Аналіз пропорційності страхової діяльності

В процесі аналізу кількісних та якісних показників діяльності підприємницьких суб'єктів, що діють на страховому ринку України, необхідно досліджувати, окрім інших важливих параметрів, і пропорційність розподілу економічних показників страхової діяльності страховиків у взаємозв'язку з відповідними факторами внутрішнього і зовнішнього середовища.

2.2. Аналіз інтенсифікації страхового підприємництва

Результати підприємницької діяльності страховиків характеризуються значною мірою взаємодією ресурсів та їх віддачею. Як відомо, однією із важливих характеристик інтенсифікації економічного розвитку господарюючих суб'єктів на страховому ринку України є зростання питомої ваги приросту ефекту від страхового бізнесу за рахунок інтенсивних факторів — продуктивності праці, капіталовіддачі, прибутковості тощо.

Аналіз страхової діяльності на макрорівні можливо здійснити досліджуючи динаміку ефекту у вигляді доходу страховиків (***Д***), під впливом динаміки їх видатків (***В***) та віддачі цих видатків ***(ДВ)***.

Відповідні абсолютні прирости даних показників можна розрахувати за формулами:

– абсолютний приріст доходу за рахунок видатків (***ΔДв***)

$$\Delta Д_в = (В_1 - В) ДВ_0 , \quad (5)$$

– абсолютний приріст доходу за рахунок віддачі видатків ($\Delta Д_{Д_в}$)

$$\Delta Д_{Д_в} = (ДВ_1 - ДВ_0) В_1 , \quad (6)$$

При цьому:

$$\Delta Д_в + \Delta Д_{д_в} = \Delta Д = Д_1 - Д_0 . \quad (7)$$

Відносні прирости:

$$\frac{\Delta ДВ}{\Delta Д} \cdot 100 + \frac{\Delta Д_{дв}}{\Delta Д} \cdot 100 = 100\% \quad (8)$$

Аналогічний підхід може бути використаний і при аналізі прибутковості страхової діяльності. Для цього можна використати наступну систему показників: прибутковість страхових платежів ***(Пс)***, як відношення прибутку (***П***) до страхових платежів (***СП***).

Звідси: $$П = П_с \cdot СП. \quad (9)$$

Аналіз ступеню інтенсифікації можна розраховувати за формулами:

– абсолютний приріст прибутку за рахунок прибутковості страхових платежів

$$\Delta П_{П_П} = (П_{П_1} - П_{П_0}) \cdot СП_1 , \quad (10)$$

– абсолютний приріст прибутку за рахунок обсягу страхових платежів ($\Delta П_{С_П}$)

$$\Delta П_{С_П} = (СП_1 - СП_0)\ П_{п_0} \tag{11}$$

Одержані результати знаходяться у взаємозв'язку з загальним приростом прибутку:

$$\Delta П_{П_П} + \Delta П_{С_П} = П_1 - П_0 = \Delta П. \tag{12}$$

Відносні прирости

$$\frac{\Delta П_{П_п}}{\Delta П} \cdot 100; \tag{13}$$

— показує питому вагу приросту прибутку за рахунок віддачі страхових платежів:

$$\frac{\Delta П_{С_п}}{\Delta П} \cdot 100; \tag{14}$$

— засвідчує питому вагу приросту прибутку за рахунок обсягу страхових платежів.

В першому випадку маємо приріст прибутку за рахунок віддачі страхових платежів, тобто інтенсивного фактора, а в другому — за рахунок екстенсивного фактора.

В світовій підприємницькій діяльності користуються також показниками прибутковості страхових відшкодувань, резервного фонду тощо.

Застосовуючи наведену вище методику, можна дати оцінку процесів інтенсифікації страхової діяльності і з цих показників.

Зазначимо, що охарактеризоване дослідження охоплює статистичні данні лише за 1995 – 1997 роки (раніше таких спостережень не проводили), а це, безумовно, ускладнює процес узагальнення та обмежує можливості визначення тенденцій розвитку страхового ринку України за умов перехідної економіки щодо більш тривалого часу. Виходячи із цього вважаємо за доцільне зробити відповідний аналіз не лише за результатами минулого року, а і виконати його на основі щоквартальних даних. Цій справі може слугувати як розширення, так і оновлення статистичної бази звітних даних щодо функціонування страхового ринку України. Вирішення цієї проблеми — необхідна умова науково обґрунтованої маркетингової діяльності страхових компаній на основі ґрунтовного і всебічного дослідження кон'юнктури ринку страхових послуг, аналізу стану відповідної ринкової ситуації, яка поєднує в собі як співвідношення і збалансованість сукупного попиту, так і пропозиції на страхові послуги та водночас доходи і витрати страховиків; дає змогу виявляти домінуючі тенденції, що знаходять прояв на національному страховому ринку; показує ступінь ділової активності як страховиків, так і страхувальників та посередників; характеризує конкурентне середовище на страховому ринку та ступінь його. монополізованості і т. ін.

Вдосконалення інформаційної бази як на макро-, так і на мікрорівнях є вагомою запорукою науково обґрунтованого прогнозування економічних параметрів страхової діяльності та визначення напрямів розвитку страхового ринку в цілому. Отже, достатня інформаційна база та новітні методики розрахунків створюють реальні передумови для вироблення стратегічних засад, напрямків науково обґрунтованої і довгочасної політики страхового бізнесу стосовно асортименту страхових продуктів, ціноутворення на страхові послуги, їх прибутковості.

За умов перехідної до ринку економіки зростає і значення управління страхової діяльності, особливо з боку держави. Розглянемо ці аспекти проблеми оптимізації і збалансування страхового підприємництва в заключній главі нашого монографічного дослідження.

2.3. Аналіз ефективності страхової діяльності

Ефективність страхової діяльності визначається наступними показниками.

Ліквідність - здатність страховика задовольняти претензії, пропоновані страхувальниками.

$$\boldsymbol{Л} = \frac{\text{зобов'язання страховика}}{\text{ліквідні активи}} \qquad (15)$$

Рентабельність страхових операцій – рівень підвищення доходів над витратами. Звичайно розраховується на основі відносини показника балансового прибутку до доходу за визначений період (як правило, за рік).

$$Р = \frac{БП}{Д} \cdot 100(\%), \qquad (16)$$

де ***Р*** - рентабельність страхових операцій (%);

БП - річна сума балансового прибутку;

Д - сума доходів страховика за рік.

Збитковість страхової суми (*Усс*) ~ економічний показник діяльності страховика, що характеризує відношення обсягу виплат страхового відшкодування і страхової суми до сукупної страхової суми всіх застрахованих об'єктів по даному виді страхування

$$У_{сс} = \frac{\overline{С}_в \cdot К_в}{\overline{С}_{сс} \cdot К_д}, \qquad (17)$$

де $\overline{С}_в$ - середня страхова виплата на один договір;

Кв - число зроблених виплат;

Ссс - середня страхова сума на один договір;

Кд - кількість укладених і оплачених договорів.

Чисельник вираження представляє обсяг страхових виплат, знаменник - обсяг відповідальності страховика.

Якщо показник ***Усс*** наближається до розрахункової чи ставки перевищує її розміри, то проводиться аналіз елементів збитковості:

2.4. Система показників, використовувана в процесі оцінки платоспроможності позичальника кредиту

Показники платоспроможності характеризують ступінь захищеності інтересів кредиторів і інвесторів, що мають довгострокові вкладення в підприємство (організацію). Практика показує, що за допомогою коефіцієнтів платоспроможності можна пророчити банкрутство суб'єкта, що хазяює, протягом п'яти років.

$$\boldsymbol{\Pi_1} = \frac{\text{власний капітал}}{\text{підсумок балансу}} \times 100\ (\%). \quad (18)$$

Коефіцієнт власності (*П₁*) характеризує **співвідношення інтересів власників підприємства (організації) і власників акцій і кредиторів.** У закордонній практиці оптимальним варіантом стабільності вважаються невисока частка позикового капіталу і значний рівень власних засобів. Така стабільна структура засобів є захистом від втрат у періоди економічного спаду і гарантією одержання кредиту, тому кредитори й інвестори віддають перевагу підприємствам з досить високим рівнем даного показника - не менш 50 %.

$$\boldsymbol{\Pi_2} = \frac{\text{позиковий капітал}}{\text{підсумок балансу}} \times 100\ (\%). \quad (19)$$

Коефіцієнт $\boldsymbol{\Pi_2}$ характеризує **структуру капіталу** суб'єкта, що хазяює, з погляду **позикових** засобів. Тут небажаний високий рівень показника $\boldsymbol{\Pi_2}$, однак не завжди вдається підтримувати дане співвідношення на низькому рівні, тому для західної практики ситуація, коли позикові засоби складають 50 % усіх засобів суб'єкта підприємницької діяльності вважається в середньому прийнятній.

$$\boldsymbol{\Pi_3} = \frac{\text{позиковий капітал}}{\text{власний капітал}}. \quad (20)$$

Коефіцієнт $\boldsymbol{\Pi_3}$ характеризує **співвідношення між активами,** забезпеченими кредиторами, і активами, забезпеченими акціонерами, іншими словами, він показує **залежність суб'єкта, що хазяює, від зовнішніх джерел засобів.** Високий рівень даного показника свідчить про ризиковане положення підприємства, оскільки нездатність погасити зобов'язання перед кредиторами може спричинити банкрутство.

$$\boldsymbol{П_4} = \frac{\text{позаоборотні активи}}{\text{власний капітал}}. \qquad (21)$$

Показник *П₄* використовується для визначення **ступеня забезпеченості основних засобів** і інших необоротних активів власним капіталом суб'єкта, що хазяює.

$$\boldsymbol{П_5} = \frac{\text{позаоборотні активи}}{\text{власний капітал + довгострокова заборгованість}}. \qquad (22)$$

Показник $\boldsymbol{П_5}$ аналогічний коефіцієнту $\boldsymbol{П_4}$ з тією лише різницею, що коефіцієнт $\boldsymbol{П_5}$ показує **ступінь забезпеченості необоротних активів** усім капіталом, що знаходиться в розпорядженні суб'єкта, що хазяює, протягом тривалого періоду часу. Порівнюючи коефіцієнти $\boldsymbol{П_4}$ і $\boldsymbol{П_5}$, можна зробити висновок про те, яка частина необоротних активів фінансується з притягнутих джерел.

$$\boldsymbol{П_6} = \frac{\text{чистий прибуток + витрати по виплаті відсотків + податки}}{\text{витрати по виплаті відсотків}} \qquad (23)$$

Коефіцієнт $\boldsymbol{П_6}$ показує здатність суб'єкта, що хазяює, виплачувати відсотки кредиторам на надані позики й у такий спосіб **характеризує захищеність кредиторів.**

$$\boldsymbol{П_7} = \frac{\text{витрати по виплаті відсотків}}{\text{позиковий капітал}} \text{ x 100 (\%).} \qquad (24)$$

Коефіцієнт $\boldsymbol{П_7}$ відбиває "ціну" притягнутих позикових засобів.

$$\boldsymbol{П_8} = \frac{\text{чистий прибуток + коректування на не грошові виплати і не грошові надходження}}{\text{звичайні акції в обороті}} \text{ (грош. од.).} \qquad (25)$$

Коефіцієнт $\boldsymbol{П_8}$ характеризує **частку коштів,** приходяться на одну акцію в звертанні.

Показники **ліквідності** використовуються для характеристики здатності суб'єкта підприємницької діяльності оплачувати протягом року свої короткострокові зобов'язання.

кошти + легкореалізовані цінні папери

***Л*₁** = —————————————————————. (26)

короткострокова кредиторська заборгованість

Показник *$Л_1$* відбиває, **чи досить у суб'єкта** підприємницької діяльності **засобів** (мається на увазі найбільш ліквідна частина оборотних коштів, без обліку резервів (запасів) і дебіторської заборгованості), що можуть бути використані для оплати короткострокових зобов'язань протягом року. Коефіцієнт ***$Л_1$*** показує, яка частина зобов'язань може бути оплачена негайно. Цей коефіцієнт також називається **коефіцієнтом ліквідності першого порядку.**

$$Л_2 = \frac{\text{кошти + легкореалізовані цінні папери + + короткострокова дебіторська заборгованість}}{\text{короткострокова кредиторська заборгованість}}. \qquad (27)$$

Коефіцієнт ліквідності другого порядку (*$Л_2$*) показує, **яка частина короткострокової кредиторської заборгованості може бути покрита платіжними засобами,** отриманими від реалізації цінних паперів і засобами, отриманими в результаті погашення вимог до дебіторів. Усі перераховані оборотні кошти можуть бути доступні суб'єкту, що хазяює, у досить короткий термін, однак для повноцінного аналізу ліквідності необхідно провести зіставлення вимог і зобов'язань суб'єкта, що хазяює, по термінах оплати і сумам.

$$Л_3 = \frac{\text{всі оборотні кошти}}{\text{короткострокові зобов'язання}}. \qquad (28)$$

Під вираженням **"всі оборотні кошти"** при обчисленні коефіцієнта ліквідності **третього** порядку розуміються платіжні засоби, легкореалізовані цінні папери, короткострокова дебіторська заборгованість, матеріально-виробничі запаси. **Даний коефіцієнт (*$Л_3$*)** показує, **чи досить у підприємства оборотних коштів** для погашення своїх короткострокових зобов'язань. Оптимальним вважається співвідношення в межах між 1:1 і 2:1 (іноді 3:1). Оборотних активів повинне бути досить для покриття, у разі потреби, усіх короткострокових зобов'язань. Однак перевищення оборотних коштів над короткостроковими зобов'язаннями більше чим у 2-3 рази свідчить про нераціональне розміщення засобів суб'єкта, що хазяює, і неефективному їхньому використанні.

Іноді для аналізу **ліквідності** має сенс вивчення структури чистих оборотних активів. **Чисті оборотні активи -** це різниця між оборотними коштами суб'єкта, що хазяює, і короткостроковою кредиторською заборгованістю. Їхня наявність означає, що суб'єкт підприємницької діяльності не тільки здатний погасити свої зобов'язання в поточному році, але має фінансові ресурси для розширення своєї діяльності в майбутньому.

матеріальні запаси

$$Л_4 = \frac{}{\text{чисті оборотні активи}}. \qquad (29)$$

2.5 Умови забезпечення фінансової стійкості страховиків

Під фінансовою стійкістю страхових операцій розуміється постійне балансування перевищення доходів над витратами по страховому грошовому фонді, сформованому зі страхових внесків, що сплачуються страхувальниками (премій).

Основою фінансової стійкості страховиків є наявність у них виплаченого статутного капіталу, страхових резервів, а також система перестрахування .

Статутний капітал (статутний фонд) страхових організацій спочатку формується за рахунок бюджету (обов'язкова форма страхування) чи за рахунок засобів від продажу акцій і інших цінних паперів.

Статутний капітал акціонерного страхового товариства (АСТ) закритого типу створюється за рахунок внесків засновників і продажі акцій працівникам даного Товариства, а АСТ відкритого типу - шляхом обміну внесків на акції засновників і продажу акцій по відкритій підписці на чи аукціоні біржі.

Акумуляція засобів страхового фонду досягається насамперед за рахунок росту числа страхувальників і застрахованих об'єктів.

Проблема забезпечення фінансової стійкості може розглядатися подвійно: як визначення системи ймовірності дефіциту засобів у якому-небудь році і як відношення доходів до витрат за минулий тарифний період.

Ступінь дефіцитності засобів страхової компанії залежить від величини страхового портфеля **(перша умова).**

Для визначення ступеня імовірності дефіцитності засобів використовується коефіцієнт професора Ф. В. Коньшина

$$K = \sqrt{\frac{1 - \overline{T}}{n \times \overline{T}}}, \qquad (30)$$

де $\overline{T}$ - середня тарифна ставка по страховому портфелі;

n - кількість застрахованих об'єктів.

Чим менше коефіцієнт K, тим вище фінансова стійкість страховика. На величину показника K, як видно з формули, не впливає розмір страхової суми застрахованих об'єктів. Він цілком визначається розміром тарифної ставки і числом застрахованих об'єктів (величиною страхового портфеля).

Однак варто мати на увазі, що коефіцієнт професора Ф. В. Коньшина дає найбільш точні результати тоді, коли страховий портфель страховика складається з об'єктів із приблизно однаковими по вартості ризиками (тобто без катастроф, землетрусів, загибелі космічних кораблів, літаків і т.п.).

Отже, однією з умов забезпечення фінансової стійкості страхових операцій є задача вирівнювання розмірів страхових сум, на які застраховані різні об'єкти. Ця задача в страховій справі вирішується в основному за рахунок передачі частини видів страхування їхньої вартості іншим страховикам у перестрахування, що здобуває в останні роки усе більше значення у страховій справі.

Для оцінки фінансової стійкості як відносини доходів до витрат за тарифний період можна використовувати коефіцієнт фінансової стійкості страхового фонду

$$K_{СФ} = \frac{\sum Д + \sum ЗФ}{\sum Р}, \quad (31)$$

де $\sum Д$ – сума доходів за тарифний період, грн., $\sum ЗФ$ – сума засобів у запасних фондах, грн., $\sum Р$ – сума витрат за тарифний період, грн.

Фінансова стійкість страхових операцій буде тим вище, чим більше буде коефіцієнт стійкості страхового фонду (друга умова).

Важливим фактором **(третя умова), що** характеризує фінансову стійкість страхової організації, крім солідного статутного капіталу і чималих резервних фондів, є **рентабельність страхових операцій,** що виражається відношенням балансової (валовий) прибутку до дохідної частини:

$$Р(\%) = \frac{\text{балансовий прибуток}}{\text{доход}} \times 100. \quad (32)$$

Однак у силу невиробничого характеру діяльності страхових організацій доход у них не створюється, а прибуток створюється (формується) за рахунок перерозподілу засобів страхувальників, тобто необхідного і прибавочного продукту, створеного в інших виробничих сферах. Тому більш коректним буде визначати рентабельність страхових операцій як показник рівня прибутковості, а саме як відношення загальної суми прибутку за визначений період до сукупної суми платежів за той же період:

$$Д = \frac{\sum БП}{\sum СВ}, \quad (33)$$

де Д - прибутковість;

$\sum БП$ - сума балансового прибутку за рік, грн.;

$\sum СВ$ - сукупна сума страхових внесків за рік, грн.

Варто мати на увазі, що доходи від страхових платежів при добровільному страхуванні являють собою ціну від продажу страхових послуг. У той час як при монопольному (державному) страхуванні ціна продажу регламентувався калькуляційною ціною; в умовах ринкової економіки калькуляційна ціна і ціна продажу можуть не збігатися.

Приклад 1. *Оцінка дефіцитності засобів з використанням «коефіцієнта професора Коньшина».* Вихідні дані:

а) у страхової компанії А страховий портфель складається з 200 укладених договорів (n=200); у страхової компанії Б - з 150 (n=150);

б) у страхової компанії А середня тарифна ставка складає 0,35 грн. зі 100 грн. страхової суми; у страхової компанії Б - 0,4 грн. зі 100 грн. страхової суми.

а)«коефіцієнт професора Коньшина» для страхової компанії А складає:

$$K_A = \sqrt{\frac{1-0{,}35}{200 \times 0{,}35}} = 0{,}096;$$

б) «коефіцієнт професора Коньшина» для страхової компанії Б складає:

$$K_Б = \sqrt{\frac{1-0{,}4}{200 \times 0{,}4}} = 0{,}1$$

Відповідь: фінансова стійкість по дефіцитності засобів у страхової компанії А вище, ніж у страхової компанії Б. **($K_А$<$K_Б$).**

Приклад 2. *Оцінка фінансової стійкості страхової компанії А і страхової компанії Б по фінансовій стійкості страхового фонду.*

Вихідні дані:

а) страхова компанія А має страхових платежів (доходів) 100 млн... грн. Сума засобів у запасних фондах на кінець тарифного періоду — 25 млн.. грн.; сума страхових виплат -40 млн.. грн.; витрати на ведення справи - 10 млн.. грн.;

б) страхова компанія Б має суму доходів 70 млн.. грн. Залишок засобів у запасному фонді - 20 млн.. грн.; страхові виплати - 30 млн.. грн.: витрати на ведення справи -10 млн.. грн.

Рішення:

Коефіцієнт фінансової стійкості страхового фонду складає:

а) для страхової компанії А

$$К_{СФ} = (100+25)/(40+10) = 2{,}5$$

б) для страхової компанії Б

$$К_{СФ} = (70 + 20)/(30+10) = 2{,}25$$

Відповідь: страхова компанія А більш фінансово стійка, чим страхова компанія Б.

Приклад 3. *Оцінка рентабельності страхової компанії А та страхової компанії Б.* Вихідні дані:

а) загальний обсяг страхових платежів страхової компанії А склав 100 млн.. грн.; погашення зобов'язань перед страхувальниками (страхові виплати) - 30 млн.. грн.; відрахування в страхові резерви і запасні фонди - 10 млн.. грн., відрахування на попереджувальні заходи (***ПМ***) - 5 млн.. грн.; витрати на ведення справи - 6 млн.. грн.

б) загальний обсяг страхових платежів страхової компанії Б склав 70 млн.. грн.; погашення зобов'язань перед страхувальниками - 20 млн.. грн.; відрахування в запасні і резервні фонди - 10 млн.. грн.; відрахування на ***ПМ*** - 5 млн.. грн.; ви-

трати на ведення справ - 8 млн.. грн.
Рішення:

$$P_A = (100\text{-}30\text{-}10\text{-}5\text{-}6)/100 = 49\% ;$$
$$P_Б = (70\text{-}20\text{-}10\text{-}5\text{-}8)/100 = 39\%.$$

Висновок: страхова компанія А має більш високу фінансову стійкість, чим страхова компанія Б за всіма показниками.

2.6. Гарантії платоспроможності страховиків

Одним з найважливіших аспектів забезпечення фінансової стійкості страховиків є досягнення ними **реальної платоспроможності.**

Для забезпечення гарантій платоспроможності страховики зобов'язані дотримувати **нормативні співвідношення** між активами (авуарами) і прийнятими ними страховими зобов'язаннями. Платоспроможність страховика без передачі частини ризику в перестрахування буде гарантована, якщо буде дотримана умова :

$$С = (А - У) \times 5\ \% \ / \ 100\ \%, \tag{34}$$

де С - сума, на яку страховик має право укладати договору по даному виді страхування;
А - величина активів страховика, що складають його капітал;
У - розмір оплаченого статутного капіталу;
5 % - нормативне процентне відношення страхових внесків, що надійшли, до оплаченого статутного капіталу по даному виду страхування.

Однією з умов забезпечення платоспроможності страховиків, як відзначалося раніше, є дотримання нормативних співвідношень між активами і прийнятими ними страховими зобов'язаннями. Економічний зміст цієї Методики складається **в порівнянні обсягу зобов'язань страховика** перед страхувальниками **з обсягом вільних активів,** що можуть бути використані на покриття цих зобов'язань:

$$\frac{\text{загальні активи (власний капітал) х 100 \%.}}{\text{загальне фінансування (разом пасиви)}}.$$

Причому чим вище відсоток, тим вище показник **загальної** платоспроможності.

Однак зазначеного вище показника буває недостатньо для повної оцінки фінансового стану страхової фірми. Так, більш широке коло показників необхідне менеджеру, що керує страхової компанії для прийняття рішень. Найбільш значимими в цьому відношенні є показники, що визначають фінансові відносини:

$$\frac{\text{власний капітал, зовнішні зобов'язання}}{\text{власний капітал, довгострокові зобов'язання}}$$

При цьому, наприклад, **органи страхового нагляду,** так само як і страхувальники, у главу кута ставлять показники платоспроможності і ліквідності; **податкова інспекція -** показники обсягу доходу і прибутку; **потенційні акціонери -** очікувані дивіденди.

Важливим **критерієм забезпечення стійкості страхових операцій** є збалансований, страховий портфель. Першим і найважливішим принципом формування збалансованого страхового портфеля є облік страховиком закону великих чисел і вибірки.

Для оцінки фінансової стійкості страхового фонду як відносини доходів до витрат за тарифний період (практичний аспект), використовується формула

$$K_{фу} = \frac{Д + C_{зф}}{P}, \qquad (35)$$

де $K_{фу}$ - коефіцієнт фінансової стійкості; Д - сума доходів страховика за тарифний період; Р - сума витрат за той же період; $C_{зф}$ - сума засобів у запасних фондах.

Нормальним станом фінансової стійкості страхової організації варто вважати, якщо $K_{фу} > 1$, тобто, коли сума доходів з урахуванням залишку засобів у запасних фондах перевищує усі витрати страховика.

Проблема забезпечення фінансової стійкості страхових організацій, як видно з формули (35), безпосередньо зв'язана **з вирівнюванням розмірів страхових сум,** на які застраховані різні об'єкти. Тільки в цьому випадку відповідно до коефіцієнта Ф. В. Коньшина фінансова стійкість не залежить від розміру страхових сум. Прагнення страховиків до вирівнювання страхових сум і породило потребу в перестрахуванні.

3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

3.1. Поняття про імовірність страхової події

Під імовірністю якої-небудь події розуміється відношення числа випадків, коли ця подія відбувається, до загального числа випадків, коли воно в принципі могла відбутися. Пояснимо це прикладом. Візьмемо монету і будемо неї кидати на "орла" чи "решку". Очевидно, що якщо число таких кидків нескінченно велике, те завдяки симетрії кількість випадків, коли випаде "орел", повинне бути дорівнює половині від числа кидків, тобто імовірність випадання "орла" дорівнює $^1/_2$. Якщо число кидків N звичайно і не занадто велике, кількість випадань "орла" n може помітно відрізнятися від величини $N/2$ і не може бути заздалегідь точно передбачено, тобто воно є випадковою величиною.

Можна говорити тільки про імовірність тієї чи іншої кількості "орлів" n у серії з N кидків. Так, наприклад, якщо ми кидаємо монету 2 рази, те можливі наступні значення n: 0,1,2. Імовірності $P(n)$ реалізації того чи іншого числа n у серії з 2 кидків визначаються шляхом підрахунку числа способів, якими може бути отриманий даний результат, і загальної кількості всіх можливих виходів у серії. Якщо позначити випадання "орла" числом 1, а не випадання (тобто випадання "решки") — числом 0, то повний перелік усіх можливих виходів у серії з

2-х кидків такий: 0,0; 0,1; 1,0; 1,1. Загальне число всіх можливих виходів дорівнює 4 (2^2). Звідси очевидно, що імовірності реалізації n=0, n =2 рівні ¼, а n=1 — ½ , сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці. У серії з трьох кидків можливі наступні виходи: n=0 (0,0,0); n=1 (0,0,1; 0,1,0; 1,0,0); n=2 (0,1,1; 1,0,1; 1,1,0); n=3 (1,1,1); загальне число всіх можливих виходів дорівнює 8 (2^3). Імовірності реалізації n=0 і n=3 рівні $^1/_8$. n=1 і n=2 — $^3/_8$, сума всіх ймовірностей дорівнює 1.

Якщо ми продовжимо наше спостереження, послідовно збільшуючи число іспитів, то одержимо наступну схему, що дає число способів реалізації кожного значення n у діапазоні від 0 до N (послідовно ліворуч чи праворуч; праворуч чи ліворуч — байдуже!):

Таблиця 1

N	Варіанти реалізації	2^N
1	1 1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16
5	1 5 10 10 5 1	32
6	1 6 15 20 15 6 1	64
.... і т.д.		

У колонці праворуч приведена загальна кількість способів реалізації всіх можливих значень n у схемі з N іспитів. Для прикладу знайдемо з цієї схеми імовірності випадання n "орлів" при 4 іспитах (.V=4). Число способів, яким може бути реалізоване задане значення числа n, дорівнює: для n = 0 — 1, для n = 1 — 4, для n = 2 — 6, для n = 3 — 4, для n!=4 — 1, разом — 16; відповідні імовірності рівні:

$$P(0) = 1/16,\quad P(1) = 4/16,\quad P(2) = 6/16,\quad P(3) = 4/16,\quad P(4) = 1/16.$$

3.2. Розподіл випадкової величини

Сукупність усіх можливих значень випадкової величини з вказівкою імовірності реалізації кожного значення називається ***розподілом*** випадкової величини. Завдання розподілу випадкової величини (закон розподілу) дає її повний імовірностний опис.

3.2.1. Біноміальний розподіл

Розподіл може бути задано таблицею, чи графіком приведеною вище схемою. У математику набір чисел, представлених цією схемою, відомий за назвою коефіцієнтів бінома, тому розглянуте вище розподіл зветься ***біноміального.*** На рис. 6 показане біноміальний розподіл для серій з 4 і 26 іспитів (графіки отримані в електронних таблицях Excel за допомогою статистичної функції БИНОМРАСП). Вона реалізує формулу Бернуллі для загального випадку в наступній постановці. Розглянемо послідовність взаємно незалежних випробувань, тобто таких випробувань, що ймовірність того або іншого результату в кожному з них не залежить від того, які результати наступили або наступлять в інших. У кожному з цих випробувань може наступити (або не наступити) деяка подія A з імовірністю p, що не залежить від номера випробування. Тоді ймовірність того, що серія з N незалежних випробувань дасть n появ і $N - n$ непояви події A є

$$P_N(n) = C^n_N\, p^n(1-p)^{N-n} \quad . \tag{36}$$

Для прикладу з монетою p = 0,5, а якщо розглядати подібну задачу для шестигранної гральної кості, то p = 1/6.

Поряд з ймовірностями $P(n)$ важливе значення має функція розподілу, чи, як її ще називають, кумулятивна, чи накопичена імовірність — імовірність того, що значення випадкової величини не буде перевищувати деякого заданого значення m:

$$F(m) = \sum_{n \le m} P(n) \, . \tag{37}$$

Для гри в орлянку функція розподілу дорівнює імовірності того, що в серії з N кидків кількість "орлів, що випали," не буде перевищувати задану величину m

$$F(m) = \sum_{n=0}^{m} P(n) \, . \tag{38}$$

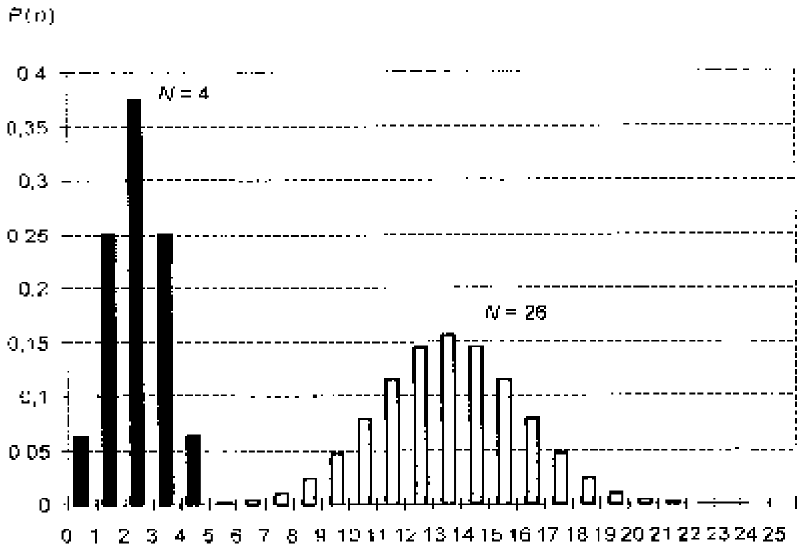


Рис. 6. Біноміальний розподіл для N = 4 і N = 26. На графіку показана імовірність $P(n)$ того, що в серії з N іспитів випаде n "орлів"

Функції розподілу для серій з N = 4 і N =26 кидків представлені на рис.7.

Як приклад визначимо імовірність того, що в серії з 4 кидків число "орлів, що випали," не перевищує 3. Складаючи імовірності, приведені нижче схеми коефіцієнтів бінома, одержимо: $F(3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) =$ $= 1/16 + 4/16 + 6/16 + 4/16 = 15/16 = 0.9375$, що в 15 серіях з 16 кількість "орлів, що випали," не буде перевищувати 3. Якщо гравець ставить 100 грн. на "решку", то з імовірністю 0,9375 (див. табл. 2) можна затверджувати, що його можливий програш не перевищить величини (3-1) x 100 = 200 грн. Тому оптимістично налаштований гравець без особливих роздумів вступить у гру, маючи в кишені 200 грн. (обережний песиміст не ризикне починати гру, не маючи в кишені 400 грн. — максимально можливого розміру програшу). Якщо гра буде складатися з 26 кидків, то песиміст вирішить, що, не маючи в кишені 2600 грн., ризиковано вступати в гру, і не вступить. Оптиміст же звернеться до рис. 7 і табл. 2 та визначить, що з імовірністю 0,96 можна затверджувати, що кількість "орлів" у серії з 26 кидків не перевищить 17; при цьому розмір максимального програшу буде дорівнює (17 - (26 -17)) x 100 = 800 грн. З такою сумою в кишені можна сміливо вступати в гру.

В усіх випадках ми вважаємо, що імовірність, яка більше за 0,95 практично дорівнює одиниці, тобто цей випадок є практично достовірним.

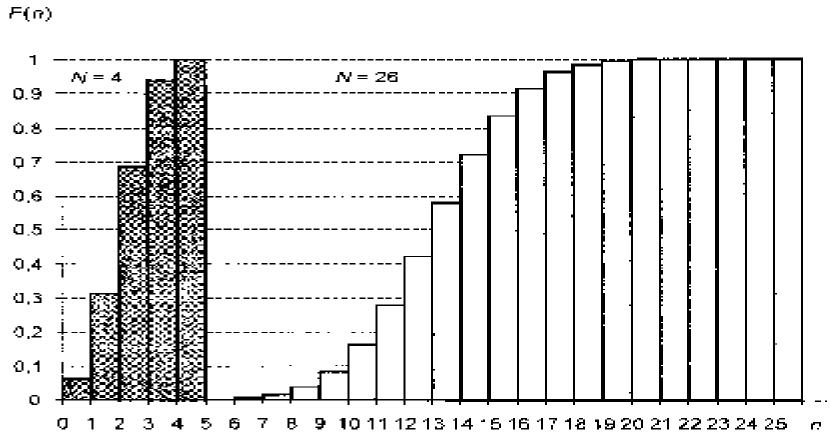


Рис. 7. Функція біноміального розподілу для $N = 4$ і $N = 26$.
На графіку показана імовірність $F\{n)$ того, що в серії з N іспитів випаде не більш n "орлів"

Зі сказаного вище видно, що на практиці часто виникає задача на визначення припустимого рівня ймовірності (величина якого залежить від індивідуальної схильності до ризику) визначити відповідне цьому рівню максимальне значення випадкової величини. З теорією гри в орлянку прямо пов'язана задача про те, яку денну суму готівки необхідно мати в ощадному банку, щоб з високим ступенем імовірності її вистачило на виплати клієнтам. Якщо припустити, що за день банк відвідують 26 клієнтів, кожний з який з рівною імовірністю може як вносити суму в 100 грн., так і знімати її з рахунка, то з імовірністю 0,96 можна затверджувати, що суми в 800 грн. виявиться цілком достатньо.

Таблиця 2

Розрахунки для побудови графіків на рис. 6-7

Число "орлів"	$P\{n)$	$P\{n)$	$F(n\}$	$F\{n)$	Число іспитів
	4	26	4	26	
0	0,0625	1.49E-08	0.0625	1.49E-08	
1	0.25	3,87E-07	0.3125	4.02E-07	
2	0.375	4.84E-06	0.6875	5.25E-06	
3	0.25	3.87E-05	0,9375	4.4E-05	
4	0.0625	0.000223	1	0.000267	
15		0.115129		0,836530	
16		0,079151		0,915681	
17		0,046559		0.962241	
18		0,023280		0,985520	
19		0.009802		0,995322	

3.3.Числові характеристики випадкових величин

Закон розподілу ймовірностей у виді формули, чи таблиці графіка дає найбільш повну інформацію про поводження випадкової величини в ході іспитів. Однак на практиці часто буває досить знати значно менше, а саме:

1) знати положення центра розподілу, навколо якого групується (більш-менш тісно) основна маса ймовірностей;

2) знати, як і наскільки розкидана біля центра основна маса ймовірностей, тобто за допомогою числового показника характеризувати ступінь розсіювання.

Спосіб обчислення центра розподілу приймається сума добутків значення випадкової величини на її ймовірність, діленої на суму всіх ймовірностей, рівну 1. Отримана в такий спосіб числова характеристика випадкової величини *n* зветься математичним сподівання і позначається

$$En \equiv \overline{n} = \frac{\sum_n nP(n)}{\sum_n P(n)} = \sum_n nP(n). \qquad (39)$$

Для біноміального розподілу центр розподілу знаходиться, природно, посередині відрізка довжиною в число кидків. оскільки імовірності їхнього випадання рівні між собою і рівні $^{1}/_{2}$:

$$\overline{n} = N/2. \qquad (40)$$

Як міру розсіювання вибирається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини (його називають дисперсією). рівного сумі квадратів відхилень усіх можливих значень випадкової величини від центра розподілу, помножених на відповідні імовірності:

$$Dn = \sum_n (n - \overline{n})^2 \, P(n). \qquad (41)$$

Для того щоб одержати характеристику розсіювання, що має таку ж розмірність, як випадкова величина і її математичне чекання, використовують квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma = \sqrt{Dn}. \qquad (43)$$

Цю величину називають середнім квадратичним, чи стандартним, відхиленням. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення характеризують абсолютну величину розсіювання випадкової величини. Як відносну характеристику розсіювання використовується коефіцієнт варіації, дорівнює відношенню середнього квадратичного відхилення до математичного сподівання:

$$V_n = \sigma / \overline{n} \qquad (44)$$

Коефіцієнт варіації показує, наскільки велике розсіювання в порівнянні із середнім значенням випадкової величини, і дозволяє порівнювати між собою розподілу. середні значення яких сильно розрізняються.

У теорії ймовірностей доводиться, що для гри в орлянку, коли імовірності випадання "орла" чи "решки" рівні між собою і рівні *1/2*, дисперсія дорівнює

$$D_n = \bar{n}/4;\quad \sigma = \sqrt{D_n} = \sqrt{\bar{n}}/2;\quad V_n = 1/(2\sqrt{\bar{n}}) = 1/\sqrt{2Nq}\,. \tag{45}$$

З формули (44) для коефіцієнта варіації видно, що зі збільшенням числа кидків у серії відносний розкид числа тих, що випали, щодо середнього значення "орлів", що характеризується коефіцієнтом варіації, зменшується як *1/q*.

Діяльність страховика багато в чому схожа з грою в орлянку (можливі тільки два результати: страховий випадок з імовірністю q і його відсутність з імовірністю 1 - q), однак маються і відмінності. По-перше, імовірності можливих виходів не рівні між собою, як імовірності випадання "орла" чи "решки", а сильно відрізняються — звичайно імовірність страхового випадку багато менше одиниці; по-друге, розмір страхової виплати, як правило, не є визначеною заздалегідь величиною (як ставка при грі в орлянку), а визначається волею случаючи, тобто є величиною випадкової.

Кількість страхових випадків за визначений період також розподілено за біноміальним законом, але з різними ймовірностями різних виходів. Якщо імовірність страхового випадку дорівнює q, то середнє число страхових випадків, дисперсія і коефіцієнт варіації рівні

$$\bar{n} = Nq;\qquad D_n = Nq(1-q);\qquad V_n = \sqrt{\frac{1-q}{Nq}}\,, \tag{46}$$

де N - число укладених договорів страхування. Виведення цих формул легко знайти в будь-якому підручнику з теорії ймовірностей.

3.3.1. Розподіл Пуассона

Як правило, імовірність страхового випадку багато менше одиниці (звичайно q ~ 0,01 - 0,03, а іноді і ще менше), звідси і середнє число страхових випадків багато менше числа договорів. Якщо число договорів N=1000, а імовірність страхового випадку q = 0,01, то середнє число страхових випадків дорівнює 10.

Щоб вивчити розподіл можливого числа страхових випадків в інтервалі в кілька одиниць навколо середнього значення, необхідно побудувати таблиці біноміального розподілу для великих значень N ~ 1000 . Це складно, та й не потрібно. При великих значеннях числа N і обмежених значеннях середнього числа страхових випадків біноміальний розподіл добре апроксимується розподілом Пуассона для числа страхових випадків:

$$P(n) = \frac{(Nq)^n}{n!} e^{-Nq} \tag{47}$$

Як видно з формули (47), розподіл Пуассона не залежить у явному виді від імовірності страхового випадку q і числа договорів N, узятих окремо, а тільки від їхньої комбінації $n = N\,q$. Дисперсія і коефіцієнт варіації розподілу Пуассона визначаються формулами

$$Dn=\bar{n} \quad Vn=1/\sqrt{\bar{n}}\,. \qquad (48)$$

Ці формули практично збігаються з формулами (46) для біноміального розподілу, з огляду на, що q << 1.

3.3.2. Нормальний розподіл

Розподіл Пуассона при $\bar{n}$ >>1 може бути з достатнім рівнем точності замінено більш простим нормальним розподілом, що має вид

$$P(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}}\exp\left[-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}\right] \qquad (49)$$

Для порівняння на рис. 8-9 приведені розподіли ймовірностей і функція розподілу для пуасонівського і нормального розподілів при середньому числі страхових випадків, рівному 13. Таке число обране для того, щоб результати можна було зіставити з результатами аналізу гри в орлянку при числі кидків N = 26, коли середня кількість випадань "орлів" у серії дорівнює 13. Графіки отримані в електронних таблицях Excel за допомогою статистичних функцій ПУАССОН і НОРМРАСП.

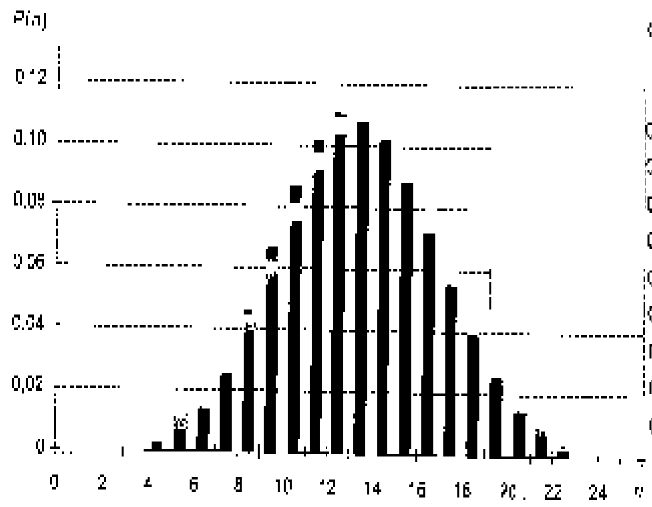


Рис. 8. Пуасонівський і нормальний розподіл при $\bar{n}$ **=13**

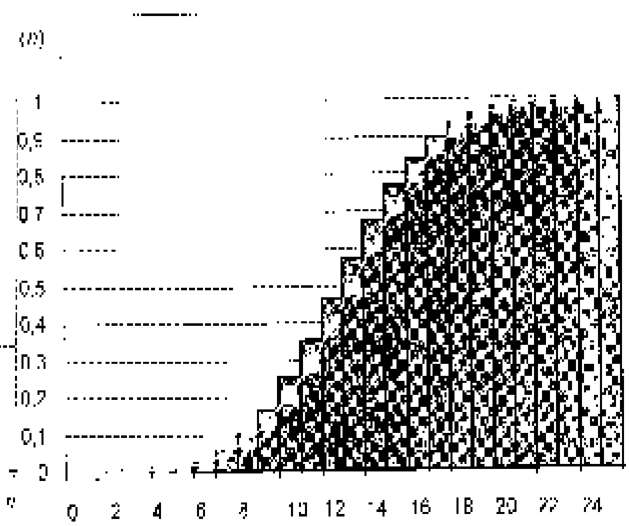


Рис. 9. Функція розподілу для пуасонівського і нормального розподілу

Таблиця 3

Розподіл ймовірностей і функція розподілу для розподілу Пуассона і нормального розподілу (фрагмент)

n	16	17	18	19	20	21	22	23
$P(n)$ Пуас.	0,07189	0,05497	0,03970	0,02716	0.01767	0,01093	0,00646	0.00365
$F(n)$ Пуас.	0,83549	0.89047	0.93017	0,95733	0,97499	0,98592	0.99238	0.99603
$P(n)$ норм.	0,07827	0,05980	0,04230	0,02771	0,01681	0.00944	0,00491	0,00236
$F\{n\}$ норм.	0.79731	0,86637	0.91724	0.95195	0.97390	0.98675	0.99372	0,99723

Знайдемо розподіл суми страхових виплат за рік, вважаючи, що величина страхової виплати фіксована і дорівнює B = 100 грн.. а середнє число страхових випадків за рік $\overline{\boldsymbol{n}}$ = 13 .

Середній розмір суми страхових виплат за рік дорівнює добутку середнього числа страхових випадків на величину страхової виплати і складає 1300 грн. Імовірність того, що число страхових випадків не перевищить 16 (а величина річної виплати 1700грн.), дорівнює 0,79; імовірність того, що річна виплата буде менше, ніж 1800 грн., дорівнює 0,92; імовірність того, що річна виплата не перевищить 1900 грн., дорівнює 0,95 і т.д. Таким чином, з імовірністю 0,95 можна затверджувати, що максимальна величина річної виплати складе 1900 грн., тому страховику для гарантованої беззбиткової роботи необхідно зібрати страхову премію в розмірі 1900 грн.

3.4. Оцінка параметрів розподілів за малими вибірками. Вплив розміру вибірки на величину ризикової надбавки

Теорія розподілу відхилень вибіркових значень від точних у залежності від розмірів вибірки була розроблена Стьюдентом.

Так само як і розподіл сумарної виплати, розподіл збитковості описується нормальним законом:

$$F(u) = \int_{0}^{u} \frac{dv}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left[-\frac{(v-\mu)^2}{2D}\right], \quad (50)$$

де μ і D — центр розподілу і дисперсія збитковості. Оскільки точні значення цих величин нам невідомі, у першому наближенні можна замінити їхніми вибірковими значеннями Однак при малому розмірі вибірки k вибіркові значення можуть помітно відрізнятися від точних, тому необхідно усереднити функцію розподілу (50) за всіма можливими значеннями цих відхилень з обліком ймовірності їх розподілів.

Усереднення виконаємо в два етапи. На першому етапі проведемо усереднення по всіх можливих положеннях центра розподілу щодо його вибіркового значення. На другому етапі виконаємо усереднення по всіх можливих значеннях дисперсії щодо її вибіркового значення. Як відомо з теорії ймовірностей та математичної статистики, вибіркове середнє розподілено за нормальним законом з дисперсією, рівною *D/k:*

$$\varphi(\tilde{y}-\mu)=\sqrt{\frac{k}{2\pi D}}\exp\left[-\frac{(\tilde{y}-\mu)^2 k}{2D}\right].$$

(51)

Множачи (50) на (51) і інтегруючи по всіх можливих значеннях μ, одержимо

$$F(y)=\int_{-\infty}^{y}dv\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\varphi(\tilde{y}-\mu)\times\exp\left[-\frac{(v-\mu)^2}{2D}\right]=$$

$$=\int_{-\infty}^{y}dv\sqrt{\frac{k}{2\pi D(k+1)}}\exp\left[-\frac{(v-\tilde{y})^2 k}{2D(k+1)}\right].$$

(52)

Ми бачимо, що усереднення по флуктуаціях центра розподілу привів до розширення щільності розподілу — дисперсія збільшилася в *(k +\)/k* раз.

На другому етапі проведемо усереднення за всіма значеннями дисперсії розподілу. Відомо, що відношення вибіркової дисперсії до точного, помножене на k-1, розподілено по так називаному закону χ^2 із k - \ -н степенями свободи зі щільністю розподілу

$$k_{k-1}(w)=\frac{w^{(k-1)/2}e^{-w/2}}{2^{(k-1)/2}\Gamma((k-1)/2)}.$$

(53)

Підставляючи $D=\frac{\tilde{D}(k-1)}{w}$ й інтегруючи за всіма значеннями *w*, одержимо

$$F(y)=\int_{-\infty}^{y}dv\int_{0}^{\infty}dw\,k_{k-1}(w)\sqrt{\frac{wk/(k-1)}{2\pi\tilde{D}(k+1)}}\exp\left[-\frac{(v-\tilde{u})^2 kw}{2\tilde{D}(k+1)(k-1)}\right]=$$

$$=\int_{-\infty}^{y}dv\sqrt{\frac{k}{\tilde{D}(k+1)}}\,s_{k-1}\left[\frac{v-\tilde{y}}{\sqrt{\tilde{D}(k+1)/k}}\right].$$

(54)

Позначаючи $\alpha=\frac{y-\tilde{y}}{\sqrt{\tilde{D}(k+1)/k}}$ остаточно одержимо

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\alpha}da\,s_{k-1}(a)=S_{k-1}(\alpha).$$

(55)

4. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ СТРАХУВАННЯ

4.1. Склад і структура тарифної ставки

Тарифна ставка — ціна страхового ризику й інших витрат, адекватне грошове вираження зобов'язань страховика за укладеним договором страхування. Розрахунки тарифних ставок здійснюються за допомогою актуарних розрахунків. Сукупність тарифних ставок зветься *тарифу*. Системний виклад тарифів зветься *тарифного керівництва*.

Тарифна ставка, по якій складається договір страхування, зветься *брутто-ставки*. У свою чергу брутто-ставка складається з двох частин: *нетто-ставки* і *навантаження*. Власне, нетто-ставка виражає ціну страхового ризику: пожежі, повені, вибуху і т.д. Навантаження покриває видатки страховика по організації і проведенню страхової справи, включає відрахування в запасні фонди, містить елементи прибутку. В основі побудови нетто-ставки по будь-якому виді страхування лежить імовірність настання страхового випадку.

Поняття імовірності стосовно до страхового випадку характеризується двома особливостями. По-перше, у загальному випадку імовірність установлюється підрахунком числа сприятливих подій. Ними можна вважати випадання заздалегідь загаданої чи цифри герба (на монеті) і т.д.

У страхуванні настання страхової події, навпаки, подія для страховика і страхувальника, як правило, несприятливе. По-друге, для визначення статистичної імовірності проводиться ряд іспитів (наприклад, монета підкидається визначену кількість разів). При страхуванні ж мається лише деяка кількість об'єктів, з яких окремі піддаються страховому випадку (реалізується страховий ризик). Але сутність імовірності при цьому не міняється. Справді, візьмемо 100 застрахованих об'єктів. Умовно статистика показує, що щорічно 2 з них піддаються страховому випадку. Яка імовірність того, що в поточному році з кожним із застрахованих об'єктів у рамках обраної страхової сукупності (100) відбудеться реалізація ризику? Очевидно, вона дорівнює 0,02, чи 2%. Це означає, що якби протягом ста років вивчався той самий об'єкт (тобто проводилося 100 іспитів) і при цьому з ним двічі стався страховий випадок, то імовірність останнього для даного об'єкта можна вважати рівної 0,02, чи 2%.

Нетто-ставка цілком призначається для створення фонду виплат страхувальникам. У зв'язку з цим вона повинна бути побудована таким чином, щоб забезпечити еквівалентність взаємин між страховиком і страхувальником. Іншими словами, страхова компанія повинна зібрати стільки страхових премій, скільки має бути потім виплатити страхувальникам.

Повернемося до приведеного приклада, у якому мається 100 застрахованих об'єктів з імовірністю страхового випадку $P(A) = 0,02$. Як визначити нетто-ставку? Імовірність така, що якби кожний з цих об'єктів був застрахований, скажемо, на 200 грн., то щорічні виплати мають скласти 400 грн. (0,02x100x200), за умови, що збиток більше чи дорівнює страховій сумі. Якщо названі виплати розділити на кількість усіх застрахованих об'єктів, то одержимо частку одного страхувальника в загальному страховому фонді, рівну 4 грн. (0,02х200). Саме таку суму (страхову премію) повинен сплатити кожен страхувальник, щоб у страхової компанії виявилося досить засобів для виплати страхового відшкодування. 4 грн. — нетто-ставка по даному виді страхування в рамках даної страхової сукупності або 2 грн. із кожних 100 грн. страхової суми.

Однак, при проведенні страхування сума виплачуваного страхового відшкодування постраждалим об'єктам, як правило, відхиляється від страхової суми по них. Причому, якщо за окремим договором виплата може бути тільки менше або дорівнювала страховій сумі, то середня по групі об'єктів виплата на один договір може і перевищувати середню страхову суму. При побудові нетто-ставки враховується саме останній показник. У цих умовах розрахована у викладеному порядку нетто-ставка коректується на коефіцієнт, обумовлений відношенням середньої виплати до середньої страхової суми на один договір. У результаті одержуємо наступну формулу для розрахунку нетто-ставки із кожних 100 грн. страхової суми:

$$T_n = P(A) \cdot K \cdot 100, \tag{56}$$

де T_n— тарифна нетто-ставка; A — страховий випадок; $P(A)$ — імовірність страхового випадку; K — коефіцієнт відношенни середньої виплати до середньої страхової суми на один договір.

Приведена формула дозволяє розмежувати поняття “ймовірність страхового випадку” й “імовірність збитку”. Імовірністю збитку називається добуток імовірності страхового випадку $P(A)$ на поправочний коефіцієнт K. Це більш загальний страховий термін. Формула може бути застосована як при удосконалюванні тарифних ставок по діючим видах страхування, так і при розрахунку ставок по таким, що вводяться знову.

Представимо формулу (56) у розгорнутому виді. По визначенню маємо

$$P(A) = M/N = K_в/K_д;\ K = C_в/C_с, \tag{57}$$

де $K_в$ — кількість виплат за той чи інший період (звичайно за рік); $K_д$ — кількість укладених договорів у даному році; $C_в$ — середня виплата на один договір; $C_с$ — середня страхова сума на один договір.

У результаті формула (56) приймає вид:

$$T = \frac{K_в \cdot C_в}{K_д \cdot C_с} \cdot 100, \qquad T = \frac{B}{C} \cdot 100,$$

де B — загальна сума виплат страхового відшкодування; C — загальна страхова сума застрахованих об'єктів.

Остання формула є не що інше, як показник збитковості зі 100 грн. страхової суми. Це означає, що при удосконалюванні тарифних ставок по діючим видах страхування основою уточнення нетто-ставок є збитковість зі 100 грн. страхової суми. Відношення кількості виплат (кількості постраждалих об'єктів)

— $К_в$ до кількості укладених договорів (застрахованих об'єктів) — $К_д$ визначає частоту страхових випадків. Відношення середньої виплати на один договір — $С_в$ до середньої страхової суми на один договір — $С_д$ є аналогом коефіцієнта $К$ в формулі (56). Збитковість страхової суми може бути розрахована як по видах страхування в цілому, так і по окремих страхових ризиках. По цим даним визначається розмір нетто-ставки. Після її розрахунку встановлюється розмір сукупної тарифної ставки, чи брутто-ставки. Для розрахунку останньої до нетто-ставки додають навантаження.

Витрати на ведення справи звичайно розраховуються на 100 грн. страхової суми (аналогічно нетто-ставці), інші надбавки встановлюються у відсотках до брутто-ставки. Припустимо, нетто-ставка по страхуванню домашнього майна визначена в 0,20 грн. зі 100 грн. страхової суми, а статті навантаження складають: витрати на ведення справи (включаючи оплату праці страхових агентів) — 0,06 грн.; витрати на проведення попереджувальних заходів — 4% брутто-ставки; прибуток — 15% брутто-ставки. Розмір сукупної брутто-ставки розраховується за формулою

$$T_b = T_n + F_{abc}, \tag{59}$$

де T_b — брутто-ставка; T_n — нетто-ставка; F_{abc} — навантаження. У цій формулі всі величини вказуються в абсолютному розмірі, тобто у гривнях зі 100 грн. страхової суми. Оскільки ряд статей навантаження (як і в нашому прикладі) встановлюється у відсотках до брутто-ставки, остання на практиці визначається за формулою

$$T_b = T_n + F_{abc} = T_n + F'_{abc} + F_{k/z} T_b \tag{60}$$

де F'_{abc} — статті навантаження, що передбачаються в тарифі в гривнях зі 100 грн. страхової суми; $F_{k/z}$ — частка статей навантаження, що закладаються в тариф у відсотках до брутто-ставки.

Звідси після нескладних перетворень маємо:

$$T_b = \frac{(T_n + F'_{abc})}{(1 - F_{k/z})} \tag{61}$$

Якщо всі елементи навантаження визначені у відсотках до брутто-ставки, то величина $F_{abc} = 0$. У цьому випадку формула (61) спрощується і приймає наступний вид:

$$T_b = \frac{T_n}{(1 - F_{k/z})} \tag{62}$$

Тепер визначимо брутто-ставку по нашому прикладу: T=0,20 грн.; F_{abc}=0,06 грн.; $F_{k/z}$= 0,04 +0,15 =0,19. За формулою (62) одержуємо

$$T_b = \frac{(0.20 + 0.06)}{(1 - 0,19)} = \frac{0.26}{0,81} = 0,32 \text{ грн.}$$

4.2. Показники страхової статистики

У практиці актуарних розрахунків широко використовується страхова статистика. Вона являє собою систематизоване вивчення й узагальнення найбільш масових і типових страхових операцій на основі вироблених статистичною наукою методів обробки узагальнених підсумкових натуральних і вартісних показників, що характеризують страхову справу. Усі показники, що підлягають статистичному вивченню, поділяються на двох груп. Перша відбиває процес формування страхового фонду, друга — його використання.

Статистика за допомогою масового спостереження, що велося за фактами й обставинами настання тих чи інших страхових випадків у минулому, одержує дані для встановлення статистичної (апріорної) імовірності існування ризику. Аналіз отриманого масиву інформації показує закономірність настання страхового випадку і служить цілям наукового передбачення майбутнього розміру збитку. Чим більше число об'єктів спостереження, тим достовірніше основу для оцінки майбутнього розвитку подій представляє встановлена імовірність, тому що тільки у великій страховій сукупності закон великих чисел може найбільше точно виявити своя дія.

У найбільш узагальненому виді, що має практичні цілі для страховика, страхову статистику можна звести до аналізу наступних показників:

- число об'єктів страхування — n
- число страхових подій — e
- число постраждалих об'єктів у результаті страхових подій — m
- сума зібраних страхових платежів — $\sum p$
- сума виплаченого страхового відшкодування — $\sum Q$
- страхова сума для будь-якого об'єкта страхування — $\sum S_n$
- страхова сума, яка приходиться на ушкоджений об'єкт сукупності, що спостерігається – $\sum S_m$.

Розрахунковими показниками страхової статистики є наступні.

Частота страхових подій. Вона дорівнює співвідношенню між числом страхових подій і числом застрахованих об'єктів, тобто частота страхових подій показує, скільки страхових випадків приходиться на один об'єкт страхування. Зазначене співвідношення може бути представлена і кількісно як величина менше 1. Це означає, що одна страхова подія може викликати кілька страхових випадків. Звідси випливає термінологічне розходження між поняттями страховий випадок і страхова подія. Страховою подією може бути град, епізоотія і т.п., що охопили своїм шкідливим впливом численні об'єкти страхування (випадки).

Спустошливість страхової події (коефіцієнт коммуляции ризику) являє собою відношення числа постраждалих об'єктів страхування до числа страхових подій, тобто – m/n – коефіцієнт комуляції ризику показує, скільки застрахованих застигає та чи інша подія, інакше кажучи — скільки страхових випадків відбудеться (наступить). Мінімальний коефіцієнт коммуляции ризику дорівнює 1. Якщо спустошливість більше 1, то більше комуляція ризику, більше цифрове розходження між числом страхових подій і числом страхових випадків. З цієї причини на практиці страхові компанії при укоаданні договорів майнового страхування прагнуть уникнути угод, де є великий коефіцієнт комуляції.

Коефіцієнт (ступінь) збитковості виражає співвідношення між сумою виплаченого страхового відшкодування і страховою сумою всіх постраждалих об'єктів страхування, тобто – $\frac{\Sigma Q}{\Sigma S_m}$. Даний показник менше або дорівнює 1.

Зворотне положення можна вважати неможливим, тому що це означало б знищення всіх застрахованих об'єктів більш ніж один раз.

Середня страхова сума на один об'єкт (договір) страхування — відношення загальної страхової суми всіх об'єктів страхування до числа всіх об'єктів страхування тобто – $\frac{\Sigma S_n}{n}$.

Об'єкти майнового страхування володіють різними страховими сумами. Тому в актуарних розрахунках застосовуються різні методи підрахунку середніх величин.

Середня страхова сума на один постраждалий об'єкт дорівнює страховій сумі всіх постраждалих об'єктів, розділеної на число цих об'єктів, тобто – $\frac{\Sigma S_m}{m}$.

Кожен з постраждалих об'єктів страхової сукупності має свою індивідуальну страхову суму, що відхиляється від середньої величини. Розрахунок цих середніх величин має велике практичне значення.

Відношення середніх страхових сум називається в практиці страхування *вагою ризику,* що выражається як $\frac{\Sigma S_m}{m} : \frac{\Sigma S_n}{n}$.

За допомогою цього відношення виробляється оцінка і переоцінка частоти прояву страхової події.

Збитковість страхової суми (імовірність збитку) дорівнює сумі виплаченого страхового відшкодування, розділеної на страхову суму всіх об'єктів страхувания, тобто — $\frac{\Sigma Q}{\Sigma S_n}$.

Показником величини ризику є число менше одиниці. Зворотне співвідношення неприпустиме, тому що це означало б недострахування. Збитковість страхової суми можна також розглядати як міру величини ризикової премії.

Норма збитковості. Це співвідношення суми виплаченого страхового відшкодування, вираженої у відсотках, до суми зібраних страхових платежів, тобто – $\frac{\Sigma Q}{\Sigma P}$ х100

Для практичних цілей обчислюють нетто-норму збитковості і брутто-норму збитковості. Отриманий показник може бути менше, більше чи дорівнює одиниці. Величина норми збитковості свідчить про фінансову стабільність даного виду страхування.

Частота збитку. Обчислюється як добуток частоти страхових випадків і спустошливості, тобто – $\frac{c}{n} \cdot \frac{m}{c} = \frac{m}{n}$.

Даний показник виражає частоту настання страхового випадку і позначається символом g. Частота збитку завжди менше одиниці. При показнику частоти, рівному одиниці, достовірна вірогідність настання даної події для всіх об'єктів. Частота збитку звичайно виражається у відсотках або промиле до числа об'єктів страхування.

Страхова статистика вимагає, щоб були установлені фактори, що зробили вплив на частоту збитку. Вплив окремих факторів є передумовою утворення ризикових груп.

Вага збитку. При проведенні деяких видів страхування можливе настання страхового випадку, що заподіює збиток, рівний дійсної вартості застрахованого майна. Такий збиток прийнятий називати повним збитком.

Однак у більшості видів майнового страхування збиток може бути менше дійсної вартості майна, що не знищено, а тільки ушкоджено в результаті страхового випадку. Такий збиток прийнятий називати частковим збитком.

Поняття ваги збитку можна виразити математично як добуток коефіцієнта ущербності $\frac{\Sigma Q}{\Sigma S_m}$ і відносини середніх страхових сум $\frac{\Sigma S_m}{m} : \frac{\Sigma S_n}{n}$.

Або

$$g = \frac{\Sigma Q}{\Sigma S_n} : \frac{m}{n},$$

де g — вага збитку, ділене – імовірність збитку (збитковість страхової суми), дільник — частота збитку.

Вага збитку, зв'язана з настанням страхового випадку, у будь-якому виді страхування обумовлена якостями, властивому об'єкту страхування. Оскільки частота збитку показує об'єкти страхової сукупності, що ушкоджені в результаті прояву ризику, то вага збитку показує середню арифметичну збитку (середнього забезпечення) по ушкоджених об'єктах страхування стосовно середньої страхової суми всіх об'єктів, тобто $g = \frac{\Sigma Q}{m} : \frac{\Sigma S_n}{n}$

Вага збитку, що також прийнято називати ступінь, чи обсяг розміру збитку, імовірність поширення збитку, показує в будь-якому випадку, яка частина страхової суми знищена.

Вага збитку знижується зі збільшенням страхової суми. Це необхідно враховувати по кожній ризиковій групі, оскільки при страхуванні по системі першого ризику і наявності франшизи недостатньо тільки знати вагу збитку для всієї сукупності, а потрібно знати, крім того, і розподіл збитку по величинах, тобто скільки збитків у кількісному вираженні, наприклад, менше 10% страхової суми і т.д.

Статистичне спостереження в страховій справі ведеться за наступними основними ознаками: час і місце настання збитку, причина, страхове забезпечення, витрати на ліквідацію збитку, страхова сума і страхова вартість, ризикова група об'єкта страхування, распространяемость збитку на інші об'єкти, результати проведення попереджувальних заходів. На підставі цих даних можуть бути обчислені відносні цифри кожної ознаки, складені спеціальні таблиці.

Звичайно мається кілька ознак, що впливають на вагу збитку. Аналіз цих факторів виражається за допомогою визначених закономірностей. Як правило, на практиці страховий внесок дещо більше страхової суми. Страхова сума є величиною, що страхувальник установлює більш-менш довільно. Якщо передбачати високий суб'єктивний ризик при великій страховій сумі, то можна думати, що страхова сума вплине на розмір ваги збитку. Як вимірник вона, безумовно, впливає на величину страхової премії, що обчислюється у відсотках від страхової суми. Доведено, що необхідна премія залежить від страхової суми, але тільки при тих обставинах, що чим більше дійсна вартість, тим більше і страхова сума. Можливо, що величина ваги збитку знаходиться в рівній залежності від дійсної вартості застрахованого майна. Оскільки при страхуванні виходячи з дійсної вартості премія збільшується пропорційно збільшенню вартості об'єкта, то попереднє твердження буде справедливо, коли об'єкт страхування той самий. Різні об'єкти страхування, наділені різними ризиками, не будуть мати рівні страхові платежі, хоча гіпотетично їхні страхові суми можуть бути рівні.

По характері ризиків страхові внески класифікуються на натуральні і постійні премії.

Натуральна премія — премія, що призначена для покриття ризику за визначений проміжок часу. Вона відповідає фактичному розвитку ризику. Натуральна премія в даний відрізок часу дорівнює ризикової премії; з часом натуральна премія змінюється. По різних видах страхування вона виражається через різні ставки. У договорах страхування, що розраховані на тривалий термін дії, ризикова премія не залишається постійно незмінної. Вона випливає за щорічною зміною ризику. У цьому випадку вважається, що ми маємо приклад натуральної премії.

Натуральна премія може також збільшуватися чи зменшуватися в залежності від характеру ризику. У договорах страхування життя через їхню тривалість натуральна премія збільшується. Облік мінливості натуральної премії в договорах страхування життя має велике значення як для фінансових результатів операцій даного виду. так і адекватності актуарних розрахунків тарифним ставкам.

Тенденція до росту натуральної премії відбивається на інших компонентах страхового внеску. На практиці цей вплив балансується шляхом відповідних надбавок до тарифу в залежності від величини ризикової премії.

Страховику необхідно постійно вивчати тенденції в розвитку натуральної премії і з урахуванням цих тенденцій вносити корективи у фінансову політику страхового товариства.

5. СТРАХОВІ ВИПЛАТИ

5.1. Основні принципи планування страхових фінансових операцій

В основі страхування життя, як і будь-якого іншого виду страхування, лежить принцип розподілу збитків однієї особи, з яким стався страховий випадок, на велике число учасників страхування, з якими в даний момент часу такий випадок не відбувся. Страхові виплати виплачюються зі страхового фонду, сформованого внесками всіх учасників страхування. Величина внеску визначається як очікувана величина страхових виплат за весь термін страхування, що приходиться на одного учасника. Смерть кожної окремої людини є зовсім непередбаченою подією, однак при великій кількості учасників страхування можна з досить високим ступенем точності пророчити кількість смертей за кожний рік страхування і за весь його термін. Оскільки характер вимирання населення слабко міняється протягом десятиліть, то роль випадковості в страхуванні життя невелика, що значно спрощує фінансові розрахунки. В інших видах страхування роль випадковості значно вище, що вимагає залучення досить складних методів математичної статистики і теорії ймовірностей.

Умова збалансованості страхової фінансової операції полягає в збалансованості взаємних фінансових зобов'язань страховика і страхувальника. *Розмір* фінансових *зобов'язань страховика* на момент укладення договору є поточна вартість очікуваних страхових виплат за весь термін дії договору відповідно до переліку страхових подій, від яких надається страховий захист. Необхідно, щоб *текугцая вартість чистих премій* (чи ***нетто-премій), що*** *сплачуються страхувальником* чи одноразово на виплат, була дорівнює вищевказаній величині. При одноразовій сплаті страхової премії її величина повинна бути дорівнює поточної вартості майбутніх за контрактом страхових виплат, тому останню часто називають вартістю (чи актуарної вартістю) контракту. При сплаті страхової премії на виплат збалансованість має місце тільки між поточними стоимостями внесків і очікуваних виплат, арифметична ж сума внесків не дорівнює поточної вартості контракту.

Основна характеристика страхової операції — поточна вартість очікуваних страхових виплат за весь термін дії договору, чи одноразова нетто-вартість страхового контракту. Важливе значення має також динаміка зміни у часі поточної вартості майбутніх страхових виплат, чи поточної вартості зобов'язань страховика. Графік залежності поточної вартості майбутніх виплат від часу — схема страхової операції — характеризує всі особливості конкретного виду страхування, тому його з успіхом можна назвати портретом страхової чи операції портретом ризику. Крапка перетинання цього графіка з віссю ординат у початковий момент часу дає поточну вартість очікуваних страхових виплат за весь термін страхування, чи одноразову нетто-вартість страхового контракту.

5.2. Таблиці смертності

Планування і проведення фінансових операцій по страхуванню життя засновані на стійкій закономірності в настанні смерті в рамках різних груп населення. Характер вимирання визначеної сукупності людей залежить від різних факторів: національних, природно-кліматичних, екологічних, соціально-економічних, професійних і т.п. Найбільш сильна кореляція спостерігається між смертністю і віком людини. Залежність смертності від віку і є основою для науково обґрунтованої організації довгострокового страхування життя.

Стандартна таблиця смертності являє собою набір стовпців, що відповідають різним демографічним показникам. У кожнім рядку таблиці приведені значення цих показників для визначеного вікового інтервалу. У повних таблицях смертності показники дані по віках з інтервалом у 1 рік, у коротких таблицях — з інтервалом у 5 років. Фрагмент таблиці представленј у табл. 4. У першому стовпці таблиці приведене *число людей l_x, що доживають* до віку x з числа народжених l_0. Величину l_0 називають *коренем таблиці смертності;* значення її звичайне дорівнює 1 млн/, 100 тис. чи 10 тис., але може бути і довільним числом. Останній рядок таблиці смертності відповідає *граничному віку ω*. Припускається, що кількість людей у віці $x > \omega$ дорівнює нулю: $l_{\omega+1} = 0$. Цілком таблиці смертності для чоловіків і жінок наприведені у додатку Б.

Таблиця 4

Фрагмент таблиці смертності

Вік	Чололвіки			Жінки		
x	l_x	d_x	q_x	l_x	d_x	q_x
0	100000	2047	0,02047	100000	1512	0.01512
1	97953	200	0,002042	98488	161	0.001635
2	97753	113	0,001156	98327	98	0.000997
3	97640	85	0.000871	98229	69	0,000702 1
4	97555	78	0.0008	98 160	57	0,000581
5	97477	74	0.000759	98 103	45	0.000459
6	97403	69	0.000708	98058	41	0.000418
7	97334	62	0.000637	98017	39	0.000398
40	83344	1145	0.013738	94143	310	0.003293 1
41	82 199	1198	0.014574	93833	344	0,003666
42	81 00!	I 94	0,014741	93489	382	0.004086
43	79807	1208	0.015137	93 107	417	0,004479
44	78599	1212	0.01542	92690	458	0.004941
45	77387	1292	0.016695	92232	449	0,004868
99	63	22	0.349206	143	70	0.48951
100	41	41	1	73	73	1

Наступний стовпець таблиці смертності дає *число померлих у* віці x $d_x = l_x \quad l_{x+1}$.

У третьому стовпці таблиці приведені значення *імовірності вмерти* протягом року для людини у віці x $q_x = d_x / l_x$

Поряд з цими параметрами, що приводяться у таблиці смертності, часто використовується ще трохи зв'язаних з ними величин. З імовірністю вмерти тісно зв'язана імовірність дожити до віку x+1 рік для людини у віці x, тобто імовірність прожити ще один рік:

$$p_x = 1 - q_x = l_{x+1} / l_x . \tag{63}$$

Імовірність прожити ще п років

$$_n p_x = l_{x+n} / l_x = p_x \times p_{x+1} \times \ldots \times p_{x+n-1} . \tag{64}$$

Імовірність померти протягом наступних *n* років дорівнює

$$_n q_x = 1 - {}_n p_x = (l_x - l_{x+n}) / l_x . \tag{65}$$

Статистичні дослідження смертності населення показали, що смертність серед чоловіків вище, ніж серед жінок, унаслідок чого в останніх більш висока тривалість життя. У Росії в 1990 р. середня тривалість життя жінок складала 74,4 роки, чоловіків — 63,9 року, тобто різниця складала 10,5 року. В наш час ця різниця збільшився. У зв'язку зі значними відмінностями рівня смертності серед чоловіків і жінок, особливо в літньому віці, російські і українські страхові компанії, як правило, установлюють різні тарифні ставки для чоловіків і жінок, використовуючи відповідні таблиці смертності. У багатьох же розвитих країнах використовують єдину таблицю смертності для чоловіків і жінок і відповідно єдину систему тарифних ставок.

В актуарної математиці велике значення має ще один демографічний фактор — *середня тривалість життя, що залишилося.* При практичних розрахунках звичайно використовують наближене значення цієї величини, що позначають e_x. Розглянемо схему розрахунку цього показника. Число осіб, що не проживуть і року, дорівнює d_x, число тих, що прожили 1 повний рік буде дорівнює d_{x+1} . Що прожили 2 повні роки — d_{x+2}, що прожили k повних років — d_{x+k}. У розрахунок приймається тільки повне число прожитого років, що давало б точний результат, якби всі смерті осіб у віці x відбувалися на початку року. Повне число hjrsd. яks проживуть особb у віці x із групи чисельністю l_x:

$$T_x = d_{x+1} + 2d_{x+2} + 3d_{x+3} + \ldots =$$

$$= l_{x+1} - l_{x+2} + 2l_{x+2} - 2l_{x+3} + 3l_{x+3} - 3l_{x+4} + \ldots =$$

$$= l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\omega - x} l_{x+k} . \tag{66}$$

Розділивши це число на чисельність групи, одержимо приблизне значення середньої тривалості життя, що залишилося, для члена групи у віці x

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\omega - x} l_{x+k} . \tag{67}$$

Часто цю величину називають *округленим значенням середньої тривалості життя, що залишилося*, маючи на увазі, що в розрахунках використовувалося округлене до цілого числа кількість років майбутньої життя для групи чисельністю l_x.

5.2.1.Інтерполяція таблиць смертності для дробових віків

У страхових розрахунках часто необхідно обчислювати число доживаючих до віку, що не виражається цілим числом, наприклад до 40 років і 3 місяців (l_x = 40,25), а також число умираючих протягом відрізка часу, меншого року. Оскільки показники таблиць смертності приведені з кроком в один рік, то для рішення цих задач потрібно провести інтерполяцію між річними значеннями. Найбільше простої, а тому і найбільш уживане наближення — припущення про рівномірний розподіл смертей у межах року. Тоді число померлих і імовірність смерті у віці x протягом частини року u ($0 < u < 1$) пропорційні її величині і рівні

$$d_x(u) = u\,d_x\,; \qquad {}_u q_x = u\,q_x\,.$$

Звідси випливає, що імовірність для людини у віці x дожити до віку $x + u$ дорівнює

$$ {}_u p_x = l_{x+u}/l_x = 1 - u + u\,p \qquad (68)$$

З урахуванням лінійної інтерполяції (68) кількості доживаючих можна уточнити формулу (67) для тривалості життя, що залишилося. Якщо імовірність смерті протягом року постійна, то з доброю точністю можна вважати, що всі смерті відбуваються в середині року, а не на початку, як ми припускали вище. Це приведе до збільшення тривалості життя, що залишилося, на півроку. Одержимо

$$\mathring{e}_x = e_x + 0{,}5\,. \qquad (69)$$

Поряд з числом доживаючих у страхових розрахунках часто використовують зворотну йому величину $1/l_x$. Використовуючи малість імовірності смерті, її також можна з гарним ступенем точності замінити лінійною функцією в проміжку між цілими значеннями віку:

$$l^{-1}_{x+u} \approx l^{-1}_x + \frac{dl^{-1}_x}{dx}\,u \approx l^{-1}_x + u\,(l^{-1}_{x+1} - l^{-1}_x) = l^{-1}_x(1-u) + u\,l^{-1}_{x+1}\,. \qquad (70)$$

<u>Приклади</u>

1.Визначити імовірність умерти протягом року для чоловіка у віці 40 років.

З Додатку Б знаходимо: l_{40} = 83 344; l_{41}= 82 199 ; $q_{40} = (l_{40} - l_{41})/l_{40} = 0{,}0137$.

2 Визначити для чоловіка у віці 40 років імовірність дожити до 60 років.

З Додатку Б знаходимо: l_{60} = 50 246; ${}_{20}p_{40} = l_{60}/l_{40} = 0{,}603$

3.Знайдемо округлену середню тривалість життя, що залишилося, для чоловіка у віці 65 років.

Підставляючи дані таблиці смертності формулу (67), одержимо значення середньої тривалості життя, що залишилося 12,24 роки.

5.3. Страхування на чисте дожиття

Страхування життя звичайно здійснюється в двох формах: страхування сум (капіталу) і страхування рент (аннуітетів). У першому випадку при настанні страхової події (смерті дожиття) виплачується одноразово визначена сума грошей, у другому — страховик робить регулярні виплати протягом визначеного періоду чи часу довічно. У класичному страхуванні життя мають місце тільки дві страхових події: дожиття до визначеного терміну і смерть у період дії договору.

5.3.1.Очікувана поточна вартість виплат

Найбільш простим варіантом є ***страхування на чисте дожиття*** *(pure endowment),* що полягає в страхуванні визначеної суми грошей на певний строк. У випадку смерті страхувальника в період дії договору страхова сума не виплачується і внески не повертаються.

Визначимо поточну вартість страхових виплат на момент укладення договору страхування. Нехай група страхувальників чисельністю l_x у віці x уклала зі страховиком договір страхування на дожиття терміном на n років. Ті, що дожили до закінчення терміну страхування повинні, одержати страхову суму S. Очевидно, сумарна виплата, яку має здійснити страховик по закінченні терміну договору, дорівнює числу доживших до віку $x + n$, помноженому на страхову суму $1_{x+n} S$. Поточна вартість цієї суми на момент укладення договору : $v^n 1_{x+n} S$, де $v = 1/(1+ i)$ — дисконтний множник i — річна процентна ставка чи річна норма прибутковості. У розрахунку на кожного страхувальника, що уклав договір, це складає величину

$$P = v^n l_{x+n} S / l_x . \tag{71}$$

Очевидно, така величина одноразового внеску, що повинний заплатити кожен страхувальник при укладенні договору. Цей же результат легко одержати й іншим шляхом, розраховуючи накопичену вартість фонду, сформованого внесками страхувальників у момент укладення договору. Якщо кожен страхувальник у віці x уніс внесок P, то первісна вартість цього фонду дорівнює $P1_x$. Множник нарощення за n років дорівнює $(1 + i)^n$. До моменту закінчення договору накопичена вартість цього фонду складе $P1_x (1 + i)^n$. Дорівнюючи цю величину до суми страхових виплат S_{lx+n}, одержимо (71).

Приклад. Визначити вартість контракту на дожиття терміном на 5 років на суму 10 000 грн. для чоловіка у віці 40 років виходячи з річної норми прибутковості 10%.

Річний дисконтний множник $v = 1/(1 + 0,1) = 0,9091$; l_{40}=83344; l_{45}=77387 (з таблиці смертності). Обчислюючи за формулою (71) поточну вартість контракту, одержимо $P = 10\,000 \times 0,9091^5 \times 77\,387/83\,344 = 5765$ грн.

Щоб проілюструвати результати прикладу, припустимо, що 83 344 страхувальникsd у віці 40 років внесли у фонд по 5765 грн. кожний. Тоді первісна вартість фонду дорівнює 480478160 грн. За 5 років вартість фонду зросте в $(1 + г')^5 = 1{,}1^5 = 1{,}6105$ разів. Накопичена вартість фонду складе 773 870 000 грн. У розрахунку на кожного з 77 387, що дожили до 45 років, це дає 10 000 грн.

Якщо порівняти формулу (71) з формулою для поточної вартості грошової суми (при $S = 1$), то видно, що вона відрізняється наявністю множника $_np_x$ — імовірністю дожиття до віку $x+n$ особа, застрахованого у віці x. Ця величина завжди менше одиниці, тому нетто-внесок кожного із застрахованих буде менше поточної вартості одиничної страхової суми. Причина цього полягає в тім, що частина застрахованих, що сплатили внески, не доживає до кінця терміну страхування, і їхні внески перерозподіляються між тими, що залишилися жити. З урахуванням цієї обставини внесок кожного з них зменшується на відповідну величину. Величину в правій частині формули (71) називають ***актуарною поточною вартістю*** страхової суми S чи ***очікуваною поточною вартістю*** (на відміну від поточної вартості при безумовних виплатах, коли $p = 1$).

5.3.2. Прибуток від смертності

Перерозподіл внесків померлих на користь що дожили дає додатковий прибуток від смертності. Визначимо річну норму прибутковості з обліком прибутку від смертності. Якщо на початку року величина страхового фонду складає F_x, чисельність застрахованих — l_x, величина індивідуального страхового фонду (у розрахунку на один застрахованого) — $f_x = F_x / l_x$, то наприкінці року величина страхового фонду збільшиться за рахунок процентного росту до значення $F_x(1 + i)$, чисельність застрахованих зменшиться на величину d_x, а величина індивідуального страхового фонду стане рівної $f_{x+1} = \dfrac{F_x(1+i)}{l_x - d_x} = \dfrac{f_x(1+i)}{1-q_x}$.
Річна норма прибутковості для віку x буде дорівнювати

$$i_x = \frac{f_{x+1} - f_x}{f_x} = \frac{i + q_x}{1 - q_x} \approx i + q_x \qquad (72)$$

Цю норму прибутковості природно назвати актуарної річною нормою прибутковості, хоча цей термін і не є загальноприйнятим. З формули (72) видно, що при невисокій процентній ставці i актуарна річна норма прибутковості може виявитися помітно вище неї. Так, при страхуванні життя в країнах з розвиненою економікою величина процентної ставки звичайно складає 4-5%, тоді як імовірність смерті протягом року, відповідно до таблиці смертності, складає для чоловіка у віці 50 років 2,2%, у віці 60 років — 4,3%. Для актуарної норми прибутковості можна ввести також актуарний річний множник нарощення й актуарний річний дисконтний множник

$$s_x = 1 + i_x = \frac{1+i}{1-q_x} = s\frac{l_x}{l_{x+1}}; \quad v_x = \frac{1}{s_x} = v\frac{l_{x+1}}{l_x}. \qquad (73)$$

Формулу (71) можна одержати, здійснюючи дисконтування суми S з актуарним дисконтним множником (що еквівалентно дисконтуванню з перемін-

$$A_{p-n:\overline{n}|}^{\;\;1} = A_{x:\overline{p-x}|}^{\;\;1}.$$

ною процентною ставкою):

$$P = v_x v_{x+1} \times \ldots \times v_{x+n-2} v_{x+n-1} S = v^n \frac{l_{x+1} l_{x+2} \times \ldots \times l_{x+n-1} l_{x+n}}{l_x l_{x+1} \times \ldots \times l_{x+n-2} l_{x+n-1}} S = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} S. \qquad (74)$$

Річна процентна ставка, що використана в розрахунках по страхуванню життя, зветься технічною процентною чи ставкою ***технічного відсотка.*** Технічний відсоток вибирається страховиком у такому розмірі, щоб при самих несприятливих обставинах забезпечити обрану прибутковість інвестицій. Звичайно величина технічного відсотка нижче тієї фактичної норми прибутковості, що одержує страховик.

Оскільки динаміка збільшення капіталу і демографічні процеси ніяк не залежать від величини страхової суми, в актуарній математиці прийнято робити всі розрахунки для страхової суми, рівній одиниці. Величину страхового внеску з одиниці страхової суми називають ***тарифною*** ставкою чи ***тарифом.*** Для будь-якої конкретної страхової суми величину страхового внеску легко одержати, множачи тарифну ставку на цю суму.

Для забезпечення єдиного підходу до рішення актуарних задач по страхуванню життя в 1898 р. на другому Міжнародному конгресі актуаріїв у Лондоні були прийняті єдині актуарні позначення, що до дійсного часу перетерпіли лише незначні зміни. Для позначення різного роду одноразових платежів використовується заголовна буква *А,* для регулярних періодичних платежів — мала літера *а.* При страхуванні на чисте дожиття очікувана поточна вартість страхових виплат у розрахунку на одного страхувальника зі страхової суми, рівній одиниці, позначається наступним символом:

$$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = v^n l_{x+n} / l_x = v^n {}_n p_x . \qquad (75)$$

Іншими словами, формула (75) визначає очікувану поточну вартість одиничної суми, тобто є актуарним дисконтним множником за *n* років відповідно до (74). Очевидна властивість цієї величини — актуарное дисконтування на термін $n + m$ від віку $x + n + m$ до віку x еквівалентно послідовному актуарному дисконтуванню спочатку на *m* років, від віку $x + n + m$ до віку $x + n$, а потім ще на *n* років, від віку $x + n$ до віку *x*.

Приклад. Визначити очікувану (актуарну) поточну вартість одиничної суми при страхуванні на дожиття терміном на 5 років для чоловіка у віці 40 років виходячи з річної норми прибутковості 10%.

Річний дисконтний множник $v = 1/(1 + 0,1) = = 0,9091$; l_{40} =83344; l_{45} =77387 (з таблиці смертності). Обчислення за формулою (75) дає:

$A_{40\ 1/5}$ =0,9091x77387 / 83344 = 0,5765 .

На рис. 10 зображена розрахована за формулою (75) залежність очікуваної поточної вартості одиничної суми, виплачуваної при дожитті до віку 45 років, від часу і, що залишився до закінчення терміну страхування, чи, що еквівалентно, від віку страхувальника $x = p - n$ на цей момент часу: $A_{x:\overline{n+m}|}^{\ \ 1} = A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} A_{x+n:\overline{m}|}^{\ \ 1}$.

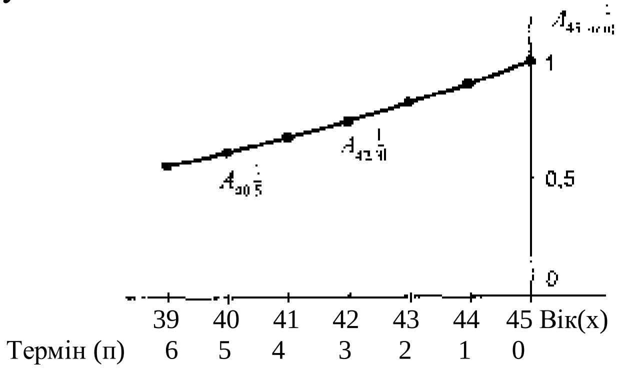


Рис. 10. Очікувана поточна вартість одиничної страхової суми при страхуванні на дожиття до віку 45 років

Ця залежність являє собою графічну схему чи "портрет" страхування на дожиття при одноразовій сплаті страхової премії. Для попереднього прикладу на початку страхування сплачується одноразовий внесок у розмірі $A_{40:\overline{5}|}^{\ 1}$, а потім протягом 5 років відбувається нарощення цієї суми до величини, рівній одиниці, після чого провадиться виплата.

5.3.3.Рекурентні формули

При комп'ютерних розрахунках, особливо із застосуванням електронних таблиць, розрахунок очікуваної поточної вартості зручніше виконувати за допомогою рекурентних формул, що зв'язують відповідні значення за два сусідніх роки. Дисконтуючи значення сумарної поточної вартості на початок попереднього року, одержимо

$$l_{p-n} A_{p-n:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v\, l_{p-n+1} A_{p-n+1:\overline{n-1}|}^{\ \ \ 1}; \qquad A_{p-n:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v\frac{l_{p-n+1}}{l_{p-n}} A_{p-n+1:\overline{n-1}|}^{\ \ \ 1}. \tag{76}$$

Задаючи значення поточної вартості страхової виплати на кінець останнього року страхування $A_{p:\overline{0}|}^{\ 1}=1$ і застосовуючи послідовно формулу (76), одержимо (74)

Якщо інтервал часу від поточного моменту часу (наприклад, кінця кварталу чи року) до моменту закінчення договору не дорівнює цілому числу років, то виникає необхідність в інтерполяції формули для актуарної поточної вартості для проміжку часу між річними вузлами. Найпростішому, що можна запропонувати, — це з'єднати прямою лінією на графіку значення *A*, отримані для двох сусідніх років (див. рис. 10). З аналітичної точки зору це відповідає лінійної інтерполяції вираження (74) у проміжку між роками *n* и *n*+1:

$$A_{p-n-\tau:\overline{n+\tau}|}^{\ \ \ 1} \approx (1-\tau) A_{p-n:\overline{n}|}^{\ \ 1} + \tau A_{p-n-1:\overline{n+1}|}^{\ \ \ 1}, \tag{77}$$

де $0 < m < 1$ — дробова частина інтервалу часу.

Очевидно, при невисоких процентних ставках лінійна апроксимація буде цілком прийнятною. Лінійне наближення відповідає нарахуванню простих відсотків у межах року. При високих значеннях процентної ставки лінійної інтерполяції може виявитися недостатньо. Більш точний розрахунок виконаний наприкінці роздягнула, однак при першому читанні його можна пропустити.

5.3.4.Комутаційні функції

Для спрощення актуарних розрахунків часто використовують так звані комутаційні функції, для яких складені спеціальні таблиці. Перша з цих функцій, використовувана в страхуванні на дожиття, визначається формулою

$$D_x = v^x l_x \,. \tag{78}$$

Зміст цієї функції досить простий. Якщо при народженні групи дітей чисельністю l_0 їх страхують на дожиття з умовою виплати одиничної страхової суми по досягненні віку x, то формула (78) дає очікувану поточну вартість суми страхових виплат, тобто сумарну страхову премію. За допомогою комутаційної функції можна представити формулу (75) у виді

$$A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{79}$$

Використовуючи таблиці смертності, можна для заданої процентної ставки розрахувати таблиці комутаційних функцій для усіх віків, приведених у таблицях смертності, а потім використовувати для актуарних розрахунків тільки ці таблиці, не звертаючи до таблиць смертності і не обчислюючи щораз дисконтні множники. З цієї причини комутаційні функції одержали широке поширення в актуарної науці. Таблиці комутаційних функцій приведені в Додатку В. У сучасних умовах, при повсюдному поширенні персональних комп'ютерів, що дозволяють швидко проводити розрахунки, роль комутаційних функцій істотно зменшилася.

Приклад. Ще в середні століття в Європі виникли фінансові проекти добровільного й обов'язкового страхування немовляти, що припускають внесення батьками визначеного внеску при народженні дитини. Визначити величину цього внеску, якщо при дожитті дитини (хлопчика) до 18 років йому передбачається виплатити суму 10 000 грн. Річна процентна ставка — 5%.

P= 10 000/3,8/Do =10 000х40 055/100 000 = 4005,5 грн.

5.3.5.Очікувана поточна вартість виплат для довільної величини процентної ставки

При великій величині процентної ставки лінійна інтерполяція (76) стане непридатною, оскільки нарощення відсотків у межах року буде відбуватися за законом складних відсотків. Тому будемо використовувати лінійну інтерполяцію не для усього вираження (76), а тільки для зворотньої кількості осіб, які доживають. У силу співвідношення (77) актуарное дисконтування на неціле число років можна представити як послідовне дисконтування спочатку на ціле число років n, а потім на залишок m, тому досить інтерполювати тільки останній актуарний дисконтний множник. Вважаючи, що нарощення відсотків здійснюється *безупинно* за законом складних відсотків одержимо

$$A_{y-\tau:\overline{\tau|}}^{\;\;1} = v^{\tau}\frac{l_y}{l_{y-\tau}} \cong l_y v^{\tau}\left(l_y^{-1}(1-\tau)+\tau l_{y-1}^{-1}\right) = v^{\tau}(1-\tau)+v^{\tau-1}\tau A_{y-1:\overline{1|}}^{\;\;1}. \tag{80}$$

Це співвідношення визначає безупинний актуарний дисконтний множник за аналогією з безупинним дисконтним множником v^{τ} у фінансовій математиці.

5.4. Страхування ренти

У багатьох випадках більш кращим для страхувальників є не одержання одноразової виплати, а регулярний доход протягом визначеного періоду чи довічно. Регулярні виплати через рівні проміжки часу (щомісяця, щокварталу, щорічно) називають ***страховою*** рентою чи ***аннуитетом*** (від *annuity* — щорічний). Часто термін "аннуитет" відносять тільки до послідовності платежів з обмеженим терміном, наприклад *п* років. Страхова рента відрізняється від звичайної фінансової ренти тим, що виплачується тільки за умови, що її одержувач живий, іншими словами, є умовною рентою.

5.4.1. Звичайна довічна рента

Найбільш розповсюдженим видом страхової ренти є ***звичайна довічна рента,*** що виплачується наприкінці кожного року дожиття протягом усього застрахованого життя. Тому що платежі здійснюються наприкінці кожного тимчасового періоду, то звичайну ренту називають ще ***рентою постнумерандо.*** Наша мета — визначення очікуваної поточний вартості ренти на початок контракту, а також на початок кожного року протягом терміну дії контракту.

Нехай l_x осіб у віці x укладають договір страхування, що передбачає регулярні виплати розміром в одиницю наприкінці кожного року довічно. Тоді наприкінці першого року страховик виплатить суму l_{x+1}, наприкінці другого року — l_{x+2}-, і т.д. доти, поки буде живий хоча б один страхувальник. Остання виплата буде здійснена особам у віці ω. Сумарна виплата складе l_ω,. Поточна вартість страхових виплат на момент укладення договору складе відповідно

$v l_{x+1},\ v^2 l_{x+2},\ \ldots,\ v^{\omega-x} l_\omega,$ де ω— граничний вік таблиць смертності ($l_{\omega+1} = 0$).

Сумарна поточна вартість усіх виплат ренти

$$v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^{\omega-x} l_\omega = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k l_{k+x}$$

У розрахунку на один страхувальника, що уклав договір у віці x, це складає

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k l_{x+k} / l_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k {}_k p_x \tag{81}$$

Формула (81) визначає очікувану поточну вартість довічної ренти з виплатами наприкінці кожного року, рівними одиниці, для страхувальника у віці *x*. Очевидно, така вартість ренти, чи величина одноразового внеску, який має заплатити кожен страхувальник при укладення договору. Внески по страховій ренті збираються з усіх, виплати ж виробляються тільки дожили до термінів її виплати, про це свідчить множник ${}_k p_x$ у формулі (81). Оскільки внески померлих перерозподіляються на користь оставшихся в живих, то при рівній величині виплат вартість страхової ренти завжди нижче вартості фінансової ренти.

Формулу (81) легко можна було одержати відразу, представивши контракт по страхуванню ренти у виді сукупності контрактів на дожиття з одиничною страховою сумою терміном на 1, 2, 3 роки і т.д. Тоді очікувана поточна вартість виплат ренти дорівнює сумі очікуваних поточних стоимостей виплат по відповідним контрактах на дожиття:

$$a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} A_{x:\overline{k}|}^{\;\;1} = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k\, l_{x+k} / l_x \tag{82}$$

5.4.2.Рекурентні формули

При комп'ютерних розрахунках, особливо з застосуванням електронних таблиць, розрахунок очікуваної поточної вартості зручніше виконувати за допомогою рекурентних формул, що зв'язують відповідні значення за два сусідніх роки. Значення сумарної поточної вартості на початок року, коли вік застрахованого дорівнює x, дорівнює сумі поточної вартості на початок наступного року і сумарної виплати наприкінці дійсного року, дисконтованої на початок року:

$$a_x l_x = (a_{x+1} l_{x+1} + l_{x+1})\, v;$$

$$a_x = (1 + a_{x+1})\, v \frac{l_{x+1}}{l_x}. \tag{83}$$

Оскільки остання виплата здійснюється у віці ω, то $a_\omega = 0$. Застосовуючи послідовно формулу (83), одержимо значення очікуваної поточної вартості на початок кожного року страхування:

$$a_{\omega-1} = v \frac{l_\omega}{l_{\omega-1}}; \quad a_{\omega-2} = v \frac{l_{\omega-1}}{l_{\omega-2}} + v^2 \frac{l_\omega}{l_{\omega-2}}; \quad \ldots; \quad a_{\omega-n} = \sum_{k=1}^{n} v^k \frac{l_{\omega-n+k}}{l_{\omega-n}}; \quad x = \omega - n; \quad a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x}. \tag{84}$$

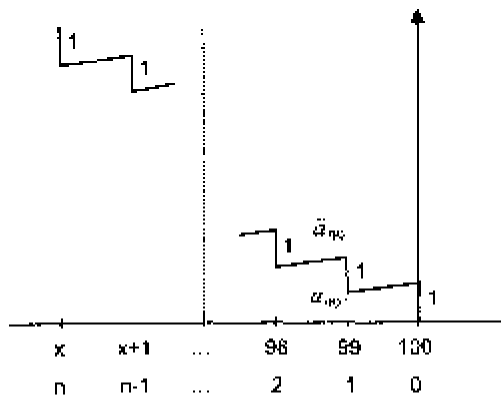


Рис. 11. Очікувана поточна вартість довічної ренти з одиничними виплатами

Значення очікуваної поточної вартості звичайної ренти, розраховані за формулами (84), нариведені в таблицях комутаційних функцій.На рис. 11 зображена розрахована за формулами (84) залежність очікуваної поточної вартості довічної ренти постнумерандо з виплатами одиничних сум від часу n, що залишився до закінчення терміну страхування, чи, що еквівалентно, від віку страхувальника $x=\omega-n$ на цей момент часу: $a_x = a_{\omega-n}$. Ця залежність являє собою графічну чи схему "портрет" страхування довічної ренти при одно разовій сплаті страхової премії. Страхувальник у віці x на початку страхування сплачує одноразовий внесок у розмірі a_x, потім протягом року відбувається збільшення цієї суми (за рахунок процентного росту і перерозподілу внесків померлих), наприкінці першого року відбувається виплата одиничної суми, що потім залишилася сума приростає протягом року, після чого проводиться наступна страхова виплата, і т.д.

Остання одинична виплата проводиться у віці ω і цілком вичерпує залишок засобів.

5.4.3. Приведена довічна рента

Поряд зі звичайною рентою часто використовується ***приведена рента (авансована рента, рента пренумерандо),*** коли платежі здійснюються на початку кожного тимчасового періоду. Очікувана поточна вартість ренти пренумерандо обчислюється так само, як і для ренти постнумерандо:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} A_{x:k}^{\;1} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k\, l_{x+k}/l_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k\, {}_kp_x \,. \qquad (85)$$

Приведені ренти широко використовуються при розрахунку страхових внесків, що сплачуються на виплат. Порівнюючи формули (84) і (85), легко бачити, що виконується співвідношення $\ddot{a}_x = a_x + 1$.

Залежність очікуваної поточної вартості довічної ренти пренумерандо від часу *n,* що залишився до закінчення терміну страхування, чи, що еквівалентно, від віку страхувальника $x = \omega - n$ на цей момент часу також зображена на рис. 11.

5.4.4. Комутаційні функції

Для спрощення актуарних розрахунків по страхуванню ренти використовують також відповідну комутаційну функцію

$$N_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} D_{x+k} = \sum_{i=x}^{\omega} D_i \,. \qquad (86)$$

Зміст цієї функції наступний. Якщо при народженні групи дітей чисельністю l_0 полягає договір страхування з умовою довічної виплати ренти розміром в одиницю на початку кожного року починаючи з віку *x,* то формула (86) дає поточну вартість страхових виплат або сумарну величину одноразового страхового внеску. За допомогою комутаційної функції можна представити формули (84) та (85) у більш компактному вигляді:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}; \qquad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}\,. \qquad : \qquad (87)$$

Таблиця функцій N_x нариведена в Додатку В. Там же приведена таблиця значень a_x.

Приклад. Визначити вартість довічної ренти з виплатою 10 тис. грн. наприкінці кожного року для чоловіка у віці 60 років. Річна процентна ставка — 5%.

З комутаційних функцій маємо: N_{61} = 21749; D_{60} = 2690. Тоді

$a_{60} = N_{61}/D_{60} =$ 21749/2690 = 8,085 грн. Вартість ренти складає 80 850 грн.

5.4.5. Термінові ренти

Якщо виплата ренти обмежена визначеним терміном *(term of annuity)*, наприклад *n* років, то рента називається ***термінової.*** Вартість звичайної термінової ренти

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = a_x - A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} a_{x+n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+1+n}}{D_x}. \tag{88}$$

Вартість приведеної термінової ренти визначається формулою

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = \ddot{a}_x - A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \ddot{a}_{x+n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{89}$$

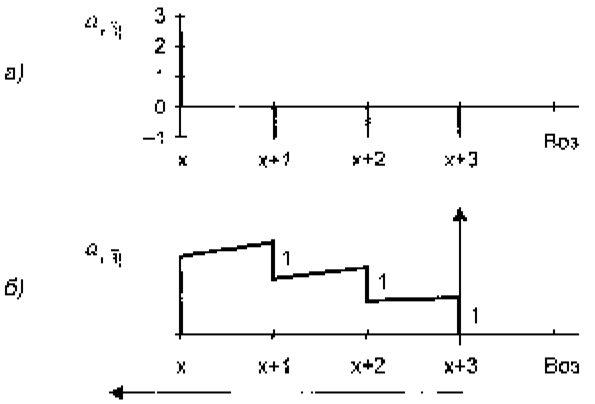


Рис. 12. Схема страхової ренти постнумерандо терміном на 3 роки
а) діаграма потоку платежів
б) очікувана поточна вартість

На рис. 12 нариведена графічна схема страхової ренти постнумерандо терміном на 3 роки. На рис. 12,а зображена діаграма потоку платежів, на рис. 12,б – очікуваної поточної вартості. У віці x застрахований сплачує страховику внесок у розмірі $a_{x:\overline{3}|}$, потім протягом року до віку $x+1$ відбувається збільшення цієї суми (у силу нарахування відсотків і вимирання частини застрахованих), потім у віці x +1 провадиться перша виплата ренти одиничної величини, потім протягом року відбувається збільшення суми, що залишилася; у віці x+2 провадиться друга виплата ренти одиничної величини, після чого залишок наростає до віку х+3 до величини, рівній одиниці, і в цей момент часу робиться остання виплата ренти, цілком вичерпна залишок засобів.

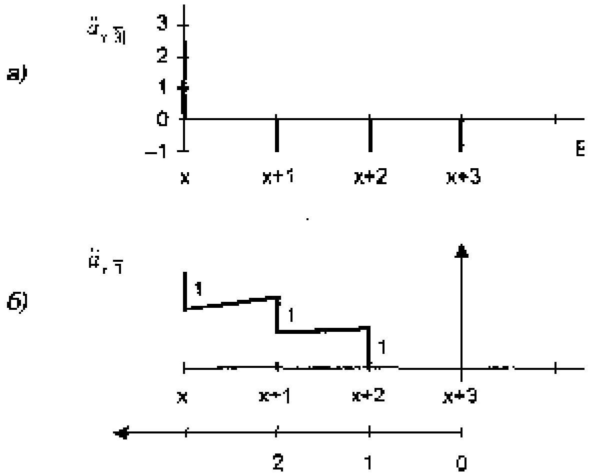


Рис. 13. Схема страхової ренти пренумерандо терміном на 3 роки
а) диафамма потоку платежів
б) очікувана поточна вартість

Динаміка зміни індивідуального страхового фонду ренти пренумерандо аналогічна випадку ренти постнумерандо, с тією тільки різницею, що перша виплата виробляється у віці x , відразу ж після одержання внеску, а остання — у віці $x+2$.

Приклад. Молода людина у віці 18 років планує одержати вищу освіту. Термін навчання — 5 років, вартість року навчання 10 тис. грн. Яку суму йому необхідно внести в страхову компанію перед початком навчання, щоб компанія взяла на себе оплату його навчання? Процентна ставка — 5%.

Оскільки плата вноситься перед початком кожного навчального року, то ми маємо справу з рентою пренумерандо. Вартість ренти з одиничними виплатами: $\ddot{a}_{18:\overline{5|}} = \frac{N_{18}-N_{23}}{D_{18}} = \frac{690\,374-509\,369}{40\,055} = 4{,}519$.

Вартість ренти: 10 000 х 4,519 = 45 190 грн.

5.4.6. Відкладені ренти

Розглянуті вище ренти називаються ***негайними,*** тому що термін їхньої дії починається відразу після висновку контракту. Термін дії ***відкладених*** (чи ***відстрочених)*** рент запізнюється щодо цього моменту на період відстрочки. Нижче приведені вартості відкладених на *m* років рент. Відкладена довічна рента постнумерандо

$$ {}_{m|}a_x = \sum_{k=m+1}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} a_{x+m} = A_{x:\overline{m|}}^{\;\;1}\, a_{x+m} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}. \qquad (90) $$

Відкладена довічна рента пренумерандо

$$ {}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\omega-x} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \ddot{a}_{x+m} = A_{x:\overline{m|}}^{\;\;1}\, \ddot{a}_{x+m} = \frac{N_{x+m}}{D_x}. \qquad (91) $$

Відкладена термінова рента постнумерандо

$$ {}_{m|}a_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=m+1}^{k=m+n} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} a_{x+m:\overline{n|}} = $$

$$ = A_{x:\overline{m|}}^{\;\;1}\, a_{x+m:\overline{n|}} = \frac{N_{x+m+1}-N_{x+m+n+1}}{D_x}. \qquad (92) $$

Відкладена термінова рента пренумерандо

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=m}^{k+m+n-1} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} = v^m \frac{l_{x+m}}{l_x} \ddot{a}_{x+m:\overline{n|}} = A_{x:\overline{m|}}^{\;\;1}\, \ddot{a}_{x+m:\overline{n|}} = \frac{N_{x+m}-N_{x+m+n}}{D_x} \qquad (93) $$

Приклад. Чоловік у віці 40 років купує за 50 тис. грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються з віку 65 років. Яка величина щорічної виплати? Процентна ставка — 5%.

${}_{25}a_{40} = N_{65}/D_{40}$ = 13 274/11 839 = 1,121. $R = 50\,000/{}_{25|}\ddot{a}_{40} = 44\,603$ грн.

5.5.7. Очікувана поточна вартість ренти для довільного моменту часу

Якщо термін $n+\tau$ ($0<\tau<1$) від поточного моменту часу до закінчення контракту не дорівнює цілому числу років, то виникає необхідність в інтерполяції формул (87) усередині річних інтервалів. Очікувана поточна вартість ренти пренумерандо дорівнює її значенню для терміну *n* років, помноженому на актуарний дисконтний множник, що "пересуває" вартість на час *τ:*

$$ a_{y:\overline{n+\tau|}} = A_{y-\tau:\overline{\tau|}}^{\;\;1}\left(a_{y:\overline{n|}}+1\right), \qquad (94) $$

де *y* — вік застрахованого за *n* років до закінчення контракту; актуарний дисконтний множник визначається формулою (88).

Для ренти пренумерандо відповідно одержимо

$$\ddot{a}_{y-\tau:\overline{n+\tau}|} = A_{y-\tau:\overline{\tau}|}^{\;\;\;1}\,\ddot{a}_{y:\overline{n}|}\,. \tag{95}$$

Зміст цих формул очевидний з рис. 12 -13.

5.5. Страхування життя

У попередніх розділах ми розглядали різні види страхування на дожиття, коли підставою для виплати страхових сум було дожиття до терміну закінчення договору або до термінів виплати ренти. Поряд зі страхуванням на дожиття дуже популярним (і набагато більш дешевим) є ***страхування життя,*** коли страхова виплата здійснюється у випадку смерті застрахованого. Страхування життя має дві основні форми: а) довічне страхування; б) страхування на термін, коли страхова сума виплачується тільки в тому випадку, якщо застрахований умре, не доживши до терміну закінчення договору.

5.5.1. Довічне страхування

Нехай l_x осіб віку x уклали договір на довічне страхування. Спустя рік після укладення договору в живих залишаться тільки l_{x+1} ocsб, а $d_x = l_x - l_{x+1}$ умруть протягом року. Будемо вважати для простоти, що страхові виплати здійснюються наприкінці року смерті застрахованого. Тоді поточна вартість виплат першого року страхування буде дорівнювати vd_x, другого року — $v^2 d_{x+1}$, третього року — $v^3 d_{x+2}$ і т.д. (як і вище, розрахунки проводяться для одиничної страхової суми).

Очевидно, що поточна вартість страхових виплат по всіх договорах складає

$$A_x l_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k}\,.$$

У розрахунку на один договір страхування одержимо

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k} / l_x\,. \tag{96}$$

Ця формула визначає очікувану поточну вартість довічного страхування з виплатою наприкінці року смерті.

Перепишемо формулу (96) у трохи іншому виді, з огляду на те, що $d_{x+k}/l_x = (d_{x+k}/l_{x+k})l_{x+k}/l_x = q_{x+k}\,{}_kp_x\,.$, тоді

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} \tag{96а}$$

З формули (96а) видно, що внесок виплат за k+\-" рік страхування у вартість поліса по страхуванню життя дорівнює поточної вартості виплат, помноженої на імовірність умерти протягом k +\ -го року, що у свою чергу дорівнює імовірності дожити до початку цього року. помноженої на імовірність смерті протягом року.

5.5.2. Страхування життя на термін

При страхуванні життя на термін *(n* років) очікувана поточна вартість виплат буде, очевидно

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} d_{x+k} / l_x = A_x - A_{x+n} \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

(97)

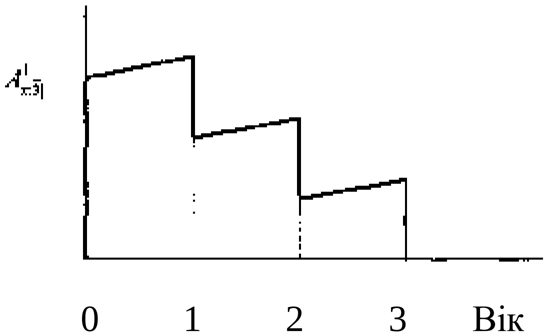


Рис. 14. Схема страхування життя терміном на 3 роки з виплатами наприкінці року смерті

На рис. 14 зображена графічна схема страхування життя терміном на 3 роки. У момент часу $t = 0$ страховик одержує внесок у розмірі $A^1_{x:\overline{3}|}$ у розрахунку на одного застрахованого, потім протягом періоду від 0 до 1 року відбувається збільшення цієї суми (у силу нарахування відсотків), потім у момент часу $t = 1$ провадиться перша виплата (по смертях, що сталися протягом першого року), потім протягом періоду від $t = 1$ до $t = 2$ відбувається збільшення суми, що залишилася, потім у *момент* $t = 1$ провадиться друга виплата, після чого залишок наростає до моменту часу $t = 3$, у який і виконується остання виплата, що цілком вичерпує залишок засобів.

5.5.3 Комутаційні функції

Для спрощення розрахунків по страхуванню життя (на випадок смерті) уводиться друга пара комутаційних функцій:

$$C_x = v^{x+1} d_x; \qquad M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$$

Тоді формули (96) і (97) можна переписати в наступному виді:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}; \qquad A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{98}$$

5.5.4. Страхування з виплатою в момент смерті

Вище ми для простоти припускали, що страхові виплати здійснюються наприкінці року смерті застрахованого. На практиці, як правило, договір страхування передбачає виплату страхової суми відразу після установлення факту смерті. Тому при обчисленні поточної вартості страхової виплати варто здійснювати дисконтування від моменту смерті, а не від кінця року, що реалізується заміною: $v^{k-1} \rightarrow v^{k+1}$, де t — інтервал часу від початку $k+1$ -го року страхування до моменту смерті (у частках року).

Більш складна задача - обчислення очікуваної кількості смертей протягом року. Справа в тім, що таблиці смертності подають інформацію тільки про загальну кількість смертей особа даного віку за рік, не деталізуючи їхній розподіл по місяцях читижнях року. Тому для обчислення кількості смертей у визначеному тимчасовому інтервалі усередині року необхідно прийняти яку-небудь гіпотезу про характер цього розподілу. Найбільш простим і природної є припущення про рівномірний розподіл смертей усередині року. Якщо розбити $k+1$ -й рік страхування на m рівних інтервалів часу тривалістю $1/m$, то кількість смертей за будь-який інтервал часу складе d_{x+k}/m. Будемо вважати, що усі виплати по страхових випадках, що сталися у відповідному інтервалі, здійснюються наприкінці цього інтервалу, тобто сукупність страхових виплат являє собою m-термінову ренту постнумерандо. Тоді очікувана поточна вартість страхових виплат за цей рік складе

$$v^k \frac{d_{x+k}}{m} \sum_{p=0}^{m-1} v^{(p-1)/m} = v^k \frac{d_{x+k}}{m} \frac{1-v}{s^{1/m}-1} \qquad (99)$$

При висновку цього співвідношення ми використовували формулу для суми геометричної прогресії. Переходячи до усе більш і більш коротких інтервалів часу ($m\to\infty$), одержимо

$$s^{1/m} = \exp\left(\frac{\ln s}{m}\right) \underset{m\to\infty}{\to} 1+\frac{\ln s}{m}; \qquad m(s^{1/m}-1) \underset{m\to\infty}{\to} \ln s .$$

У результаті поточна вартість страхових виплат за рік дорівнює:

$$v^{k+1} d_{x+k} \frac{i}{\ln(1+i)} .$$

Цей же результат можна було одержати відразу ж з первісної формули (99), переходячи при $m\to\infty$ від підсумовування до інтегрування:

$$\frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} v^{(p+1)/m} \underset{m\to\infty}{\to} \int_0^1 dt \times v^t = \frac{v-1}{\ln v} = \frac{vi}{\ln(1+i)} .$$

Очікувана поточна вартість страхових виплат, здійснюваних у момент смерті, для довічного страхування $(\overline{A}_x)$ дорівнює:

$$(\overline{A}_x = \frac{i}{\ln(1+i)} \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k}/l_x = \frac{i}{\ln(1+i)} A_x . \qquad (100)$$

В актуарної математиці позначення з рисою зверху відносяться до безупинних виплат. У даному випадку страхові виплати відбуваються досить часто, тобто практично безупинно протягом кожного року страхування.

Формула (100) відрізняється від відповідної формули (98) для страхування з виплатою наприкінці року смерті наявністю додаткового множника. Величина цього множника при невеликих значеннях річної процентної ставки визначається наближеною формулою $\frac{i}{\ln(1+i)} \approx \frac{i}{i-i^2/2} \approx 1+i/2$.

Точно такий же результат ми одержали, якби вважали, що всі смерті відбуваються в середині чергового року, а нарахування відсотків — протягом року за законом простих відсотків. Для приклада: при i=0,1 цей множник дорівнює 1,05.

Аналогічним чином для вартості термінового контракту по страхуванню життя терміном на *n* років замість (98) одержимо

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\ln s}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} d_{x+k}/l_x = \frac{i}{\ln s} A^1_{x:\overline{n}|}\,. \tag{101}$$

На рис. 15 представлена залежність очікуваної поточної вартості від часу для страхування життя терміном на 3 роки зі страховими виплатами безпосередньо після установлення факту смерті застрахованого. У момент часу $t = 0$ страховик одержує внесок у розмірі $\bar{A}^1_{x:\overline{3}|}$ у розрахунку на одного застрахо=ваного, протягом усього терміну страхування потім відбувається деяке збільшення цієї суми (у силу нарахування відсотків), з одного боку, і безупинне її зменшення в результаті страхових виплат — з іншої, причому останній процес є переважним. До моменту закінчення терміну страхування цілком вичерпуються отримані засоби.

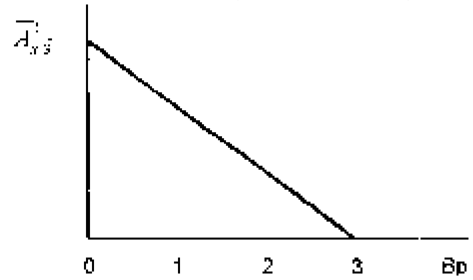


Рис. 15. Схема страхування життя терміном на 3 роки з виплатами безпосередньо після смерті

Приклад. Страхувальник у віці 45 років придбав довічний контракт, по якому у випадку його смерті спадкоємці повинні одержати 10 тис. грн. Яка вартість цього контракту, якщо річна процентна ставка дорівнює 5%?

З таблиць комутаційних функцій одержимо значення

$$M_{45} = 3563;\ D_{45} = 8613;\ A_{45} = 0{,}414; \qquad \bar{A}_{45} = 0{,}414 \times 0{,}05/\ln 1{,}05 = 0{,}424\,.$$

Вартість контракту дорівнює 4240 грн.

5.5.5. Рекурентні формули

При комп'ютерних розрахунках, особливо із застосуванням элекгроних таблиць, розрахунок очікуваної поточної вартості зручніше виконувати за допомогою рекурентних формул, що зв'язують відповідні значення за два сусідніх роки. Значення сумарної поточної вартості на початок року, коли вік застрахованого дорівнює *x*, дорівнює сумі поточної вартості на початок наступного року і сумарної виплати наприкінці дійсного року, дисконтованої на початок року:

$$A_x l_x = (A_{x+1} l_{x+1} + d_x)v\,; \qquad A_x = (d_x + A_{x+1} l_{x+1})\frac{v}{l_x}\,. \tag{102}$$

Значення очікуваної поточної вартості звичайної ренти, розраховані за формулами (3.4.10), приведені в таблиці в прил. 2. Для страхування з виплатою в момент смерті випливає в (3.4.10) замінити $d_x \to d_x \times i/\ln(1+i)$.

5.5.6. Страхування життя зі зростаючоїю страховою сумою

Стандартне зростаюче страхування життя означає щорічний ріст страхової суми на одиницю в порівнянні з одиничною страховою сумою

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1} d_{x+k}/l_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)C_{x+k}/D_x\,.$$

першого року страхування. Поточна вартість поліса стандартного зростаючого довічного страхування життя дорівнює

Використовуючи формулу (99), одержимо

$$D_x (IA)_x = \left[M_x + \sum_{k=0}^{\infty} k C_{x+k} \right] = M_x + \sum_{q=0}^{\infty} (q+1) C_{x+1+q} = = M_x + D_{x+1} (IA)_{x+1} = M_x + M_{x+1} + D_{x+2} (IA)_{x+2} = \cdots = = M_x + M_{x+1} + \ldots + M_{\omega} = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k} .$$

За допомогою цієї формули результат виражається через стандартні комутаційні функції, тому і тип страхування названий стандартним. З метою спрощення обчислень уводиться ще одна комутаційна функція: $R_x = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k}$.

Остаточно одержимо $(IA)_x = R_x / D_x$. (103)

Поточна вартість поліса стандартного зростаючого страхування життя терміном на *n* років

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v^{k+1} d_{x+k} / l_x = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{C_{x+k}}{D_x} \ldots = \frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{D_x} \tag{104}$$

Якщо страхові виплати здійснюються в момент смерті, то треба формули (102)-(103) помножити на множник $i/\ln(s)$:

$$(I\bar{A})_x = \frac{i}{\ln(1+i)} (IA)_x ; \quad (I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{\ln(1+i)} (IA)^1_{x:\overline{n}|} .$$

Якщо страхова сума зростає q раз у рік щораз на величину $1/q$, а виплати здійснюються безпосередньо після смерті, те очікувана поточна вартість такого страхування

$$(I^{(q)}\bar{A})_x = (I\bar{A})_x - \bar{A}_x + \frac{i - d^{(q)}}{\ln(1+i) \cdot d^{(q)}} A_x ; \quad (I^{(q)}\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = (I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \frac{i - d^{(q)}}{\ln(1+i) d^{(q)}} A^1_{x:\overline{n}|} . \tag{105}$$

5.5.7. Страхування життя зі страховою сумою, що убуває

Стандартне убутне страхування життя широко використовується для гарантії повернення узятого страхувальником кредиту (у випадку його смерті) за умови, що заборгованість також убуває лінійно. Природно, що таке страхування здійснюється тільки на кінцевий термін, рівний терміну позики. Поточна вартість такого стандартного страхового контракту терміном на *n* років

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} d_{x+k} / l_x = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \frac{C_{x+k}}{D_x} \tag{106}$$

Після нескладних перетворень одержимо

$$(DA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{n M_x - R_{x+1} - R_{x+n+1}}{D_x} . \tag{107}$$

Якщо страхова сума зменшується q раз за рік щораз на величину $1/q$, а виплати здійснюються безпосередньо після смерті, то очікувана поточна вартість такого страхування

$$\left(D^{(q)}\overline{A}\right)^1_{x:\overline{n|}} = \left(n + \frac{1}{q}\right)\overline{A}^1_{x:\overline{n|}} - \left(I^{(q)}\overline{A}\right)^1_{x:\overline{n|}}.$$

(108)

5.6. Ренти, виплачувані кілька разів у рік

Щорічні ренти зустрічаються значно рідше, ніж ренти, виплачувані кілька разів у рік (піврічні, щоквартальні, щомісячні). Так, наприклад, пенсії виплачуються щомісяця. Страхові премії також часто вносяться чи щомісяця щокварталу. Принципи розрахунку поточної вартості цих рент такі ж, як і у випадку щорічних рент, однак висновок остаточних формул більш складний у зв'язку з тим, що необхідно вміти обчислювати дисконтні множники і чисельність тих, що доживають для інтервалів часу, тривалість яких менш року. Для дисконтних множників особливих проблем не виникає, оскільки ми припускаємо, що нарощення відсотків відбувається безупинно: для проміжних же значень чисельності що доживають використовується лінійна інтерполяція.

Розглянемо авансовану термінову ренту, виплачувану q раз у рік. Величина кожної виплати дорівнює $1/q$, тому сумарна виплата за рік, як і у випадку щорічної ренти, дорівнює одиниці. Поточна вартість цієї ренти позначається так само, як і для щорічної ренти, але з верхнім індексом q:

$$\ddot{a}^{(q)}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{q-1} v^{k-p/q}\,\frac{l_{x+k+p/q}}{l_x} = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{q-1}\frac{D_{x+k+p/q}}{D_x}.$$

(109)

5.6.1. Прості формули для q-кратних рент

Досить компактну формулу для q-кратної авансованої ренти можна одержати для малих значень річної процентної ставки i, коли можна вважати, що в межах року справедлива лінійна інтерполяція не тільки числа що доживають, але і дисконтного множника (тобто в межах року нарахування відсотків відбувається за законом простих відсотків). Тоді і для комутаційної функції D також буде справедлива лінійна інтерполяція в межах року:

$$D_{x+k+p/q} \cong D_{x+k} + \frac{p}{q}\left(D_{x+k+1} - D_{x+k}\right)$$

Підставимо цю формулу у (109) і виконаємо підсумовування по k:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{D_{x+k}}{D_x} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}}; \quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{D_{x+k+1} - D_{x+k}}{D_x} = \frac{-D_x + D_{x+n}}{D_x} = -1 + \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Потім виконаємо підсумовування по p з використанням формули для суми членів арифметичної прогресії:

$$\ddot{a}^{(q)}_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)\sum_{p=0}^{q-1}\frac{p}{q^2} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{q-1}{2q}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right).$$

(110)

Аналогічним чином можна одержати і формулу для звичайної ренти

$$a^{(q)}_{x:\overline{n|}} = a_{x:\overline{n|}} + \frac{q-1}{2q}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right).$$

(111)

Якщо процентна ставка досить велика, то лінійну інтерполяцію для D застосовувати не можна і потрібен більш детальний аналіз.

5.6.2. Безупинні ренти

Якщо виплати ренти відбуваються досить часто, то можна вважати, що процес виплат безупинний (для щотижневих виплат – це дуже гарне наближення). Поточну вартість безупинної ренти легко одержати, спрямувавши q у нескінченність у кожній з формул (110) чи (111)

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{n}|} + \frac{D_x - D_{x+n}}{2D_x} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{D_x - D_{x+n}}{2D_x} = \frac{a_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{2}. \tag{112}$$

5.6.3. Точні формули для q-кратних рент для довільної процентної ставки

Якщо процентна ставка досить велика, то лінійна інтерполяція (110) для D незастосовна. Тому будемо використовувати в розрахунках лінійну інтерполяцію тільки для числа тих, що доживають, для дисконтних же множників будемо використовувати точні вираження. У результаті одержимо

$$\ddot{a}^{(q)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{q-1}\frac{D_{x+k+p/q}}{D_x} = \alpha(q)\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(q)\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right); \tag{113}$$

$$a^{(q)}_{x:\overline{n}|} = \alpha\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \left(\beta + \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right), \tag{114}$$

де $\alpha(q) = \frac{i\,d}{i^{(q)}d^{(q)}}; \quad \beta(q) = \frac{i - i^{(q)}}{i^{(q)}d^{(q)}};$, $i^{(q)}, d^{(q)}$ – фактичні процентна і дисконтна ставки за період, рівний $1/q$ частини року.

Висновок формули (105) заснований на лінійній інтерполяції числа тих, що доживають (106). У результаті одержимо

$$A_{x:\overline{k+p/q}|}^{\ \ 1} = v^{k+p/q}\left(l_{x+k}(1-p/q) + l_{x+k+1}\,p/q\right)/l_x =$$
$$= A_{x:\overline{k}|}^{\ \ 1}\, v^{p/q}(1-p/q) + A_{x:\overline{k+1}|}^{\ \ 1}\, v^{p/q-1}\, p/q. \tag{115}$$

Підставляючи (112) у (105), одержимо

$$\ddot{a}^{(q)}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[(\alpha-\beta)A_{x:\overline{k}|}^{\ \ 1} + \frac{\beta}{v}A_{x:\overline{k+1}|}^{\ \ 1}\right], \tag{116}$$

де коефіцієнти α та β являють собою суми геометричної й арифметико-геометричної прогресії:

$$\alpha(q) = \frac{1}{q}\sum_{p=0}^{q-1} v^{p/q} = \frac{1-v}{q(1-v^{1/q})} = \frac{d}{d^{(q)}};$$

$$\beta(q) = \frac{1}{q}\sum_{p=0}^{q-1}\frac{p}{q}v^{p/q} = \frac{1}{q(1-v^{1/q})}\left[\frac{v^{1/q}(1-v)}{q(1-v^{1/q})} - v\right] = \frac{i - i^{(q)}}{i^{(q)}d^{(q)}}v.$$

Підсумовування в першому доданку в (116) відразу ж дає щорічну ренту пренумерандо, друга сума

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_{x:\overline{k+1}|}^{\ \ 1} = \sum_{q=1}^{n} A_{x:\overline{q}|}^{\ \ 1} = \sum_{q=0}^{n-1} A_{x:\overline{q}|}^{\ \ 1} - A_{x:\overline{0}|}^{\ \ 1} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Групуючи доданки в (116), одержимо коефіцієнт a при щорічній ренті (106):

$$a = a - \beta(1 - 1/v) - \frac{id}{i^{(q)} d^{(q)}}.$$

5.7. Накопичувальне страхування з фіксованими внесками

У страховій практиці часто використовують накопичувальні схеми страхування, у яких фіксуються величини не страхових виплат, а внесків, що сплачуються. Шукана величина, що підлягає визначенню за допомогою актуарних розрахунків, – накопичена величина внеску. Причина популярності таких страхових схем полягає в тім, що страхувальники психологічно легше сприймають банківську схему нарощення внеску, що дозволяє легко оцінити прибутковість. Крім того, унаслідок постійної зміни процентної ставки не представляється можливим гарантированно спланувати на термін більш року страхування за класичною схемою з нормою прибутковості, здатної конкурувати із сьогоднішньою прибутковістю банківських вкладів. Застосування схеми з фіксованими внесками дозволяє працювати з процентною ставкою, що плаває, яку можна в кожен момент часу вибрати на досить високому конкурентноздатному рівні.

Якщо кожен член великої групи чисельності l_x у віці x внесе у фонд платіж у розмірі 1, то через n років накопичена сума буде дорівнює $l_x s^n$. У розрахунку на одного, який дожив до віку $x + n$ це дасть

$$S_{x\,\overline{n|}} = \frac{l_x s^n}{l_{x+n}} = \frac{1}{A^{\;1}_{x\,\overline{n|}}}. \qquad (117)$$

Як видно з формули (117), нарощення суми буде відбуватися більш високими темпами, чим на банківському вкладі з такою же процентною ставкою, за рахунок перерозподілу внесків померлих поміж тими, що дожили.

Якщо кожен член групи вносить на початку кожного року у фонд суму в розмірі 1 (рента пренумерандо), то накопичена через n років сума в розрахунку на одного з тих, хто дожв буде дорівнювати

$$\ddot{s}_{x\,\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{l_{x+k} s^{n-k}}{l_{x+n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{A_{x+k:\overline{n-k|}}^{\;\;1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_{x+n}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}. \qquad (118)$$

Якщо внески будуть вноситися наприкінці кожного року (рента постнумерандо), то аналогічним образом одержимо

$$s_{x\,\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{x+k}}{D_{x+n}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_{x+n}}. \qquad (119)$$

Повертаючи до формул для поточної вартості відповідних рент на момент початку договору, ми бачимо, що вони зв'язані з приведеними вище формулами універсальним співвідношенням

$$\frac{a_{x\,\overline{n|}}}{s_{x\,\overline{n|}}} = \frac{\ddot{a}_{x\,\overline{n|}}}{\ddot{s}_{x\,\overline{n|}}} = A_{x\,\overline{n|}}^{\;\;1}.$$

Дане співвідношення справедливо для усіх видів рент: відстрочених, із платежами кілька разів у рік.

6. СТРАХОВІ ПРЕМІЇ

6.1. Основні визначення

У попередній главі розглядалася теорія страхових виплат для різних видів страхування життя і була визначена одноразова вартість страхових контрактів як очікувана поточна вартість страхових виплат на момент укладення договору. Однак довгострокові контракти по страхуванню життя оплачуються одноразовим внеском тільки в рідких випадках — занадто велика їхня вартість. Як правило, страхова премія сплачується на виплат — щорічно, щокварталу, щомісяця. Якщо при одноразовій оплаті страхувальник цілком виконує свої зобов'язання в момент укладення договору, то при періодичній сплаті внесків вони виконуються на виплат. Очевидно, що від способу сплати страхової премії страхувальником вартість зобов'язань страховика ніяк не залежить.

При розрахунку величини внесків, що періодично сплачуються, необхідно враховувати як процентний доход від їхнього інвестування, так і демографічні фактори (смертність). Останній фактор впливає на величину внесків, оскільки далеко не всі страхувальники встигають до настання смерті сплатити всі передбачені страховим контрактом внески. Якщо величина внесків, що періодично сплачуються, постійна, то сукупність цих внесків являє собою постійну ренту платежів, детально вивчену в попередній главі. У зв'язку з тим що договір страхування набирає сили тільки після одержання першого внеску, рента страхових платежів завжди є приведеної (рента пренумерандо).

Основа для розрахунку величини страхових внесків — умова рівності зобов'язань страховика і страхувальника на момент укладення договору: очікувана поточна вартість майбутніх страхових виплат повинна дорівнювати очікуваній поточній вартості майбутніх страхових внесків. Якщо договір страхування терміном на *n* років укладений у віці *x*, очікувана поточна вартість страхових виплат дорівнює *A*, а невідома величина щорічних страхових внесків позначена через *P*, то згадане вище рівність має вид $A = P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, де $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ — очікувана поточна вартість ренти з річними платежами одиничної величини.

Звідси щорічний внесок $P = \dfrac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$. (120)

Формула (112) показує, у скількох разів величина щорічного внеску менше величини внеску, що одноразово сплачується, *тому величину* $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ часто ***ще називають коефіцієнтом розстрочки.*** Якщо зменшення чисельності страхувальників і процентний доход від внесків дорівнюють нулю (l = const, i=0), то коефіцієнт розстрочки буде в точності дорівнюdfnb тривалості терміну платежів *n*.

Часто період сплати страхової премії складає лишь частина терміну дії договору страхування. Протягом періоду сплати страхової премії страхувальник зобов'язаний цілком внести підлягаючі сплаті внески, тобто цілком виконати свої зобов'язання. Термін сплати премій будемо надалі позначати буквою *m*. Перша премія вноситься на початку першого року страхування, остання — на початку *m*-го року. Величина щорічного внеску визначається тоді формулою (120).

Період від дати сплати останнього внеску до першої (або єдиної) страхової виплати називають вичікувальним. При страхуванні капіталу на дожиття вичікувальний період продовжується до закінчення терміну договору страхування. При страхуванні ренти вичікувальний період закінчується з початком періоду виплат ренти.

6.2. Нетто-премії для елементарних видів страхування

6.2.1. Страхування на чисте дожиття

Розглянемо спочатку найбільш просту ситуацію, коли вичікувальний період отсутствует і сплата страхової премії відбувається протягом усього терміну дії договору страхування. Нехай вік застрахованого x років, термін страхування n років дорівнює періоду сплати премії. Величина страхового внеску з одиничної страхової суми дорівнює одноразової вартості страхування, діленої на відповідний коефіцієнт розстрочки:

$$P_{x\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{A_{x\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}},$$

(121)

Приклад. Визначити величину річних внесків при страхуванні на дожиття терміном на 5 років на суму 10 тис. грн. людини у віці 40 років виходячи з річної норми прибутковості 5%.

Одноразова вартість такого контракту для жінок (чоловіків):

$$A_{40\overline{5}|}^{\ \ 1} = \frac{D_{45}}{D_{40}} = \frac{10\,265(8613)}{13\,373(11\,839)} = 0,768(0,728).$$

З таблиць комутаційних функцій одержимо значення D_x для жінок (чоловіків): D_{40} =13373(11839); D_{45}=10265(8613).

Використовуючи формулу, що виражає коефіцієнт розстрочки через першу пару комутаційних функцій, а також значення цих функцій, одержимо:

N_{40}= 218 027 (158 589); N_{45}=157658(106217);

$\ddot{a}_{40\overline{5}|} = (N_{40} - N_{45})/D_{40} =$ 4,514 (4,424).

Величина річного внеску з одиничної страхової суми:

$$P_{40\overline{5}|}^{\ \ 1} = A_{40\overline{5}|}^{\ \ 1} / \ddot{a}_{40\overline{5}|} = 0,170(0,165).$$

Річний внесок зі страхової суми в 10 000 дорівнює 1700 грн. (1650 грн.).

Період сплати внесків або може збігатися з терміном дії договору, або бути менше його. В останньому випадку на полісі указується вік застрахованого, по досягненні якого поліс має бути цілком оплачений.

Якщо тривалість періоду сплати страхової премії дорівнює *m* років, то величина щорічного внеску визначається формулою

$$P_{x:\overline{n}|}^{\ 1} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}},$$
(122)

6.2.2. Страхування ренти

Страхування ренти є різновидом страхування на дожиття, коли замість одноразової виплати по дожиттю до терміну закінчення договору передбачено ряд регулярних страхових виплат протягом деякого періоду чи часу довічно (за умови дожиття до термінів виплат). Тому на додаток до періоду сплати страхової премії і вичікувальному періоду, передбаченим при страхуванні на дожиття, тут виділяють також період страхових виплат, протягом якого страховик виконує свої фінансові зобов'язання стосовно страхувальника.

Розглянемо спочатку найбільш простий випадок, коли вичікувальний період отсутствует. Будемо вважати, що період виплат довічної ренти (пенсії) починається по досягненні людиною визначеного віку *p*, а договір страхування укладений у віці *x* і передбачений період сплати внесків протягом $m = p - x$ років. Тоді очікувана поточна вартість цієї відстроченої на *m* років ренти на момент укладення договору страхування

$$_{m|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} = \frac{N_p}{D_x}$$
(123)

де *N, D* – відповідні комутаційні функції.

Коефіцієнт розстрочки, що відповідає заданому періоду сплати страхової премії

$$\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x} = \frac{N_x - N_p}{D_x}$$
(124)

Розділивши (123) на (124), одержимо

$$_{m}P_x = \frac{_{m|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{N_p}{N_x \cdot\cdot N_p}.$$
(125)

Приклад. Страхувальник у віці 40 років уклав договір страхування пенсії, відповідно до якого починаючи з 65 років довічно йому буде виплачуватися пенсія в розмірі 10 тис. грн. на початку кожного року. Визначити розмір річних внесків, що будуть сплачуватися страхувальником, починаючи з 40 і до 65 років.

Відповідно до таблиці комутаційних функцій одержимо значення N_x для жінок (чоловіків):

N_{40} =218 015 (158 412); N_{65} =31 579(13 274). Річний внесок з одиничної страхової суми (річної суми виплат): $P_{40:\overline{25}|} = 0{,}169\ (0{,}091)$. =0,169(0,091).

Очевидно, річні внески зі страхової суми 10 000 грн. становлять для жінок 1690 грн., для чоловіків — 910 грн.

Якщо період сплати внесків менше терміну відстрочки, то величина щорічного внеску визначається за формулою

$$_{p-x}P_x = \frac{_{p-x|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{N_p}{N_x - N_{x+m}}.$$
(126)

Для термінової ренти тривалістю *n* років одержимо

$$ {}_{p-x|}P_{x:\overline{n}|} = \frac{{}_{p-x|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{N_p - N}{N_x - N_{x+m}} \qquad (127) $$

6.2.3. Страхування життя (на випадок смерті)

На відміну від страхування на дожиття в страхуванні на випадок смерті отсутствует вичікувальний період, тобто період, коли страхова премія вже цілком внесена, а обов'язок страховика здійснювати страхові виплати ще не наступила. Це зв'язано з тим, що страховим випадком, що зобов'язує зробити виплату, є смерть застрахованого, котра може наступити в будь-який момент після укладення договору.

Розглянемо спочатку найбільш простий випадок довічного страхування, коли внески сплачуються страхувальником, поки він живий (тобто період сплати внесків збігається з терміном страхування), а страхова виплата виробляється безпосередньо після смерті. Величина страхового внеску з одиничної страхової суми дорівнює одноразової вартості поліса, діленої на відповідний коефіцієнт розстрочки

$$ \overline{P}_x = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{i}{\ln(1+i)}\frac{M_x}{N_x} \qquad (128) $$

Приклад. Страхувальник у віці 45 років уклав довічний договір страхування з умовою щорічної сплати страхових внесків, поки він живий. Страхова сума складає 10 тис. грн., річна норма прибутковості — 5%. Визначити величину річних внесків.

З таблиці комутаційних функцій одержимо значення M_x для жінок (чоловіків): M_{45} = 2758 (3563); N_{45} = 57 646 (106 040). Підставляючи ці дані у формулу (128), одержимо: $\overline{P_{45}}$ = 1.025 x 2758(3563) / 157646(106040) = 0,0179 (0,0343).

Річний внесок зі страхової суми 10 000 грн. дорівнює 179 грн. — для жінок. 343 грн. — для чоловіків.

Якщо період сплати внесків при довічному страхуванні на випадок смерті обмежений (до віку *p)*, то коефіцієнт розстрочки

$$ \ddot{a}_{x:\overline{p-x}|} = \frac{N_x - N_p}{D_x}, \qquad (129) $$

а величина річного внеску з одиничної страхової суми визначається формулою (130)

$$ \overline{P}_x = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{p-x}|}} = \frac{i}{\ln(1+i)}\frac{M_x}{N_x - N_p}. $$

Для умов попереднього прикладу термін сплати страхової премії обмежений віком *p* = 65 років. Визначити величину річного страхового внеску.

$$N_{65} = 31\,579\;(13\,274);$$

$$\overline{P}_{45:20|} = 0.0179\;(0{,}0343) \times \frac{157\,646\;(106\,040)}{126\,067\;(92\,766)} =$$

$$= 0{,}0224\;(0{,}0392).$$

Для страхування життя на термін *n* років відповідно маємо

$$\overline{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{p-x}|}} = \frac{i}{\ln(1+i)} \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_p} \tag{131}$$

6.2.4. Змішане (комбіноване) страхування життя

Цей вид страхування являє собою комбінацію термінового страхування життя і страхування на дожиття на цей же термін. Часто його просто називають страхуванням на дожиття (на відміну від чистого дожиття). Страхова сума виплачується застрахованому при дожитті до закінчення терміну або тому, хто одержує вигоду, якщо застрахований вмер раніше. Одноразова премія такого страхування дорівнює сумі одноразових премій страхований на випадок смерті і на дожиття:

$$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\,1}. \tag{132}$$

При сплаті страхової премії на виплат величина періодичних внесків

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}. \tag{133}$$

Іноді зустрічається змішане страхування життя з нерівними страховими сумами — страхова сума по смерті вибирається більше, ніж по дожиттю. У цьому випадку при розрахунку тарифів за основу приймається страхова сума по дожиттю, а одноразова вартість страхування з одиничною страховою сумою

$$A_{x:\overline{n}|} = \gamma\, A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\,1}; \qquad \gamma = S_Д / S_x. \tag{134}$$

де γ — відношення страхових сум по смерті і по дожиттю.

6.2.5. Нетто-премії для пенсійних планів

Розрізняють два основних типи пенсійних планів: плани з фіксованою виплатою пенсії і плани з фіксованим внеском.

План з фіксованою виплатою пенсії припускає нагромадження засобів для забезпечення виплат пенсії встановленого договором розміру по настанні пенсійного віку. Рівень пенсійного забезпечення звичайно встановлюється в залежності від заробітної плати працівника в момент укладення договору. Перевага системи з фіксованою виплатою полягає в тім, що вона дає застраховані тверді гарантії рівня їхнього пенсійного забезпечення в майбутньому. Недолік системи в тім, що в працівника можуть виникнути фінансові проблеми при сплаті майбутніх внесків, якщо величина його зарплати з віком понизиться. Страхова ж компанія несе на собі ризик низької прибутковості інвестицій.

План з фіксованим внеском — план, у якому розмір внеску встановлюється в залежності від заробітної плати працівника і змінюється разом з розміром останньої. Потім внески інвестуються, і розмір пенсії визначається при досягненні пенсійного віку виходячи з накопиченої суми. Така система дозволяє гнучко реагувати на зміну процентної ставки протягом терміну страхування. Недолік її — досить високий ступінь невизначеності в розмірі пенсії.

Змішані плани сполучають у собі елементи системи з фіксованим внеском і системи з фіксованою виплатою. Так, наприклад, умовами пенсійного плану може бути передбачений вік, по досягненні якого працівник може (чи повинний) перейти від системи з фіксованим внеском до системи з фіксованою виплатою.

Детальному попередньому розрахунку піддається тільки традиційна схема з фіксованою виплатою пенсії, тому ми зосередимо свою увагу на ній.

6.2.5.1. План без повернення внесків

Такий пенсійний план являє собою класичну довічну ренту, виплачувану починаючи з моменту досягнення застрахованим пенсійного віку *p*. Якщо вік застрахованого в момент укладення договору дорівнює *x*, те ми маємо справу з довічною рентою пренумерандо, відкладеної на *d= p-x* років. Її поточна вартість на момент укладення договору дорівнює

$$ {}_{d|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+d}}{D_x} = \frac{N_p}{D_x}. \qquad (135)$$

Величина річних страхових нетто-внесків визначається шляхом розподілу вартості ренти на очікувану поточну вартість ренти внесків, що сплачуються протягом *m* років

$$ P_x = \frac{{}_{p-x|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}} = \frac{N_p}{N_x - N_{x+m}}, \qquad (136)$$

де $\ddot{a}_{x:\overline{m|}} = \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$ - річний коефіцієнт розстрочки (пренумерандо).

Якщо вичікувальний період відсутній *{d = m}*, то в знаменнику формули (136) $x+m$ варто замінити на *p*.

Якщо пенсійні виплати здійснюються довічно *q* разів у рік у розмірі 1/*q*, починаючи з віку *p*, то поточна вартість такої ренти на момент укладення договору

$$ {}_{p-x|}\ddot{a}_x^{(q)} = \frac{D_p}{D_x}\ddot{a}_p^{(q)} = \frac{D_p}{D_x}\left[\alpha(q)\ddot{a}_p - \beta(q)\right], \qquad (137)$$

де коефіцієнти α та β визначаються формулою (116).

У свою чергу страхові внески також можуть сплачуватися частіше, ніж один раз у рік. Якщо страхові внески сплачуються *m* разів у рік, то річна сума внесків

$$ P_x^{(r)} = \frac{{}_{p-x|}\ddot{a}_x^{(q)}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}^{(r)}} = \frac{D_p\left[\alpha(q)\ddot{a}_p - \beta(q)\right]}{D_x\left[\alpha(r)\ddot{a}_{x:\overline{m|}} - \beta(r)(1 - D_{x+m}/D_x)\right]}. \qquad (138)$$

6.2.5.2. План з поверненням сплачених внесків у випадку смерті в допен-

сійному віці

Як правило, майже у всіх схемах пенсійного страхування передбачений захист сплачених страхувальником внесків на випадок його смерті в допенсионном віці. У цьому випадку поряд з фондом, призначеним для здійснення пенсійних виплат, необхідно створити відповідний фонд для повернення сплачених внесків у випадку смерті страхувальника до настання пенсійного віку. Для простоти будемо вважати, що вичікувальний період відсутній: $m = p - x$.

У випадку, коли повернення сплачених до моменту смерті внесків здійснюється наприкінці страхового року, очікуване поточна вартість цього фонду на момент укладення договору дорівнює

$$P_x^{nev}\sum_{k=0}^{p-x-1}(k+1)v^{k+1}d_{x+k}/l_x = P_x^{nev}(IA)^1_{x:\overline{p-x}|}, \tag{139}$$

де P_x^{nev} -величина внесків, які щорічно сплачуються, $(IA)^1_{x:\overline{p-x}|}$ - очікувана поточна вартість стандартного страхування на випадок смерті зі зростаючої страховою сумою.

Величина нетто-внеску для одиничної щорічної пенсії визначається з умови рівності поточних стоимостей внесків і виплат:

$$P_x^{nev}\ddot{a}_{x:\overline{p-x}|} = {}_{p-x}|\ddot{a}_x + P_x^{nev}(IA)^1_{x:\overline{p-x}|}. \tag{140}$$

Звідси маємо

$$P_x^{nev} = \frac{{}_{p-x}|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{p-x}|} - (IA)^1_{x:\overline{p-x}|}} = \frac{N_p}{N_x - N_p - R_x + R_p + (p-x)M_p} \tag{141}$$

У випадку, коли повернення внесків здійснюється безпосередньо після смерті страхувальника, очікувана поточна вартість цього фонду дорівнює

$$P_x^{nev} = \frac{{}_{p-x}|\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{p-x}|} - (IA)^1_{x:\overline{p-x}|}\dfrac{i}{\delta}} \tag{142}$$

де δ =- ln(l + i) — сила росту.

Якщо страхова премія сплачується r разів у рік протягом p - x років, то поточна вартість індивідуального фонду, призначеного для повернення внесків

$$P_x^{nev}(I^{(r)}\bar{A})^1_{x:\overline{p-x}|},$$

де

$$(I^{(r)}\bar{A})^1_{x:\overline{p-x}|} = \frac{i}{\delta}\left\{(IA)^1_{x:\overline{p-x}|} - A^1_{x:\overline{p-x}|}\left(1-\frac{1-d^{(r)}/i}{d^{(r)}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{i}{\delta D_x}\left\{R_x - R_p - (p-x)M_p - (M_x - M_p)\left(1-\frac{1-d^{(r)}/i}{d^{(r)}}\right)\right\}. \tag{143}$$

6.2.5.3. План з додатковими виплатами у випадку смерті в пенсійному віці

Переважній більшості страхувальників представляється несправедливим та обставина, що коли страхувальник умирає за день до настання пенсійного віку, то спадкоємцям повертають усі сплачені їм внески, а якщо смерть настає день по тому, те вони одержують тільки першу пенсійну виплату. Для захисту сплачених внесків на випадок смерті страхувальника в пенсійному віці застосовують численні схеми. Природно, що цей захист діє обмежений період часу й у обмеженому розмірі. Як приклад розглянемо схему, відповідно до якої у випадку смерті страхувальника в перші 5 років після початку виплати пенсії страховик робить страхову виплату в розмірі 5 річних пенсій.

Якщо страхова виплата виробляється безпосередньо після смерті страхувальника, то очікувана поточна вартість фонду, призначеного для виплат по смерті в пенсійному віці

$$\frac{D_p}{D_x}\,5\bar{A}^{1}_{p:\overline{5}|} = 5\,\frac{M_p - M_{p+5}}{D_x}\,\frac{i}{\delta} \tag{144}$$

Величина річної суми нетто-внесків визначається з умови рівності очікуваної поточний вартості сумарного фонду і очікуваної поточний вартості страхової премії

$$P_x^{(n)}\,\ddot{a}^{(q)}_{x:\overline{p-x}|} = \frac{D_p}{D_x}\ddot{a}^{(q)}_p + P_x^{(n)}\,(I^{(q)}\bar{A})^{1}_{x:\overline{p-x}|} + 5\frac{D_p}{D_x}\bar{A}^{1}_{p:\overline{5}|}, \tag{145}$$

звідкіля

$$P_x^{(n)} = \frac{D_p}{D_x}\,\frac{\ddot{a}^{(q)}_p + 5\bar{A}^{1}_{p:\overline{5}|}}{\ddot{a}^{(q)}_{x:\overline{p-x}|} - (I^{(q)}\bar{A})^{1}_{x:\overline{p-x}|}} \tag{146}$$

Відзначимо, що унаслідок великої розмаїтості пенсійних планів неможливо, та й не потрібно розглядати всі їх докладно, важливо на простих прикладах показати, як треба їх розраховувати. Більше того, унаслідок широкого поширення персональних комп'ютерів немає потреби одержувати щораз результати в аналітичному виді, а потім уже по отриманих формулах робити розрахунки. Очевидно, у даний час аналітичні формули для кожного "стандартного" випадку страхування мають лише історичне та ще, мабуть, пізнавальне значення. Оскільки вихідні дані (таблиця смертності) задаються у виді числового масиву і кінцеві дані також представляють числовий масив, важливо зосередити свою увагу не на висновку громіздких формул, а на змісті виконуваних обчислень і інтерпретації результатів комп'ютерних розрахунків.

6.3. Загальна схема страхування життя

Найбільш загальна схема страхування життя визначається послідовністю страхових виплат довільної величини, здійснюваних у довільні моменти часу, і відповідною довільною послідовністю страхових внесків. Спочатку розглянемо довічне страхування життя з мінливою рік від року страховою сумою c_k, яка буде виплачуватися наприкінці року смерті страхувальника. Одноразова нетто-премія для такого страхування

$$E_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} c_{k+1}\,v^{k+1}\,d_{x+k}/l_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} c_{k+1}\,\frac{C_{x+k}}{D_x}. \tag{147}$$

Якщо $c_k = k$, то ми маємо справу зі стандартним типом страхування життя зі зростаючої страховою сумою. Тоді $E_x = (IA)_x$ У випадку, коли страхування покриває тільки n років, тобто коли $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$, для стандартного зростаючого страхування життя одержимо

$$E^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k-1)\frac{C_{x+k}}{D_x} \equiv (IA)^1_{x:\overline{n}|} .$$

(148)

Для стандартного убутного страхування життя одержимо відповідно

$$c_{x+k} = n - k;\quad E^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\frac{C_{x+k}}{D_x} = (DA)^1_{x:\overline{n}|} .$$

(149)

Припустимо тепер, що страхування оплачується щорічними внесками Π_x, які вносяться в моменти часу k = 0, 1, 2, ... Поточна вартість цих внесків на момент укладення договору страхування

$$S\Pi = \sum_{k=0}^{\omega-x-1}\Pi_k v^k l_{x+k}/l_x .$$

(150)

Як правило, практично в усіх схемах страхування життя величина щорічних внесків залишається постійною протягом терміну страхування: $\Pi_x=P$.

Тоді для довічного страхування одержимо

$$S\Pi = P\sum_{k=0}^{\omega-x-1} v^k l_{x+k}/l_x = P\ddot{a}_x .$$

(151)

Для страхування на термін n років:

$$S\Pi = P\sum_{k=0}^{n-1} v^k l_{x+k}/l_x = P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

(152)

Розмір нетто-премії визначається з умови рівності поточнлї вартості страхових виплат по смерті і внесків:

$$\sum_{k=0}^{\omega-x} c_{k+1} v^{k+1} d_{x+k}/l_x = \sum_{k=0}^{\omega-x}\Pi_k v^k l_{x+k}/l_x ;$$

(153)

$$P = \frac{\sum_{k=0}^{\omega-x} c_{k+1} C_{x+k}}{D_x \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

(154)

де n — тривалість періоду сплати внесків.

Формула (150) дозволяє описувати не тільки страхові внески, але також і страхові виплати по дожиттю у виді одноразової чи виплати ренти. Доданки в (150), які описують виплати, повинні мати негативну величину. Розглянемо як приклад страхування на дожиття терміном на n років з періодичною сплатою внесків на початку кожного року страхування. Тоді

$$\Pi_0 = \Pi_1 = \ldots = \Pi_{n-1} = P_{x:\overline{n}|};\quad \Pi_n = -1,\ \Pi_{n+q} = 0,\quad q = 1, 2, \ldots$$

Оскільки виплати по смерті відсутні

$$P_{x:\overline{n}|}\sum_{k=0}^{n-1} v^k l_{x+k}/l_x = v^n l_{x+n}/l_x ;\quad P_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+n}}{D_x \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

(155)

6.4. Премія, навантажена на витрати. Брутто-премія

Проведені вище розрахунки розміру страхової премії були засновані на рівності очікуваної поточної вартості страхових виплат і страхової нетто-премії. Нетто-премія забезпечує лише покриття очікуваних страхових виплат. Операції за страховим договором вимагають визначених витрат (витрати страхування), для покриття яких понад нетто-премію стягується ще навантаження.

Сума нетто-премії і навантаження називається ***брутто-премією.*** Часто її називають ще офісною премією.

Звичайно розрізняють *три види* витрат.

1. Витрати придбання (аквизиционные витрати) часто ще називають початковими витратами. Вони зв'язані з придбанням поліса і складаються з комісійних страхового агента, витрат по оформленню і реєстрації поліса, вартості консультацій, медичного огляду, реклами і т.д.

Для простоти часто до витрат придбання відносять тільки комісійні страхового агента (брокера), інші ж витрати, що у постійно діючій страховій компанії мають регулярний характер, відносять до адміністративних. Такий поділ є зручним, оскільки оплата витрат придбання поліса відбувається в момент надходження першого внеску, оплату інших витрат важко прив'язати до якогось конкретного моменту часу. Ще одна перевага такого поділу в тім, що усі витрати придбання відносяться на рахунок конкретного агента (брокера) за конкретним договором з конкретними терміном дії і страховою сумою, а інші витрати носять загальноофісний характер і практично не залежать від характеристик договору.

2. Витрати зборів (витрати поновлення) зв'язані з розсиланням нагадувань про сплату премії, а також з виплатою регулярних комісійних чи агенту брокеру, що продав поліс. Витрати стягуються в дні сплати регулярних внесків.

3. Адміністративні витрати містять у собі витрати по забезпеченню функціонування страхової компанії (зарплата, оренда, плата за комунальні послуги, вартість обробки даних, податки, плата за ліцензію і т.п.), а також інші витрати, що не ввійшли в попередні пункти.

По способу розрахунку розрізняють три типи витрат:

1. Прямо пропорційні страховій сумі.

2. Прямо пропорційні премії (наприклад, витрати по інкасації страхових платежів).

3. Не залежні від премії чи страхової суми (наприклад, вартість виготовлення полісів, адміністрування, медичного огляду і т.п.).

Витрати можуть також представляти собою довільну комбінацію перерахованих вище типів.

Для простоти ми надалі будемо користатися величиною витрат на одиницю страхової суми; відповідні витрати придбання позначимо буквою α, витрати по зборі страхових платежів — буквою β, щорічні адміністративні витрати — буквою γ.

Будемо вважати, що витрати придбання оплачуються цілком при одержанні першого внеску, адміністративні витрати провадяться рівномірно протягом усього терміну дії договору (n років), витрати по зборі платежів — протягом періоду сплати внесків (m років). Рівняння для визначення розміру щорічної брутто-премії з одиничної страхової суми має вид балансу: очікувана поточна вартість страхової брутто-премії дорівнює сумі очікуваних поточних стоимостей страхових виплат і витрат на момент початку договору:

$$\Pi \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = A - \alpha + \beta \Pi \ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma \ddot{a}_{x:\overline{n}|},$$

(156)

де m и n — тривалість періоду сплати внесків і термін дії договору, Π — щорічна брутто-премія, A — поточна вартість очікуваних страхових виплат.

Щорічна брутто-премія

$$\Pi = \frac{1}{(1-\beta)}(P + P^{\alpha} + P^{\gamma}); \quad P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}; \quad P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}; \quad P^{\gamma} = \gamma\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

(157)

Три доданки в дужках позначають відповідно нетто-премію, щорічну частину оплати витрат придбання і щорічну частину оплати адміністративних витрат. Звідси ясно, що страхувальник оплачує витрати придбання на виплат протягом усього періоду сплати внесків, хоча комісійні за продаж поліса сплачуються агенту (брокеру) цілком при укладення договору. Це означає, що вищезгадані витрати несе страховик, як би надаючи страхувальнику довгострокову позичку, а останній погашає заборгованість протягом періоду сплати внесків. Якщо договір страхування припиняється до закінчення періоду сплати внесків, страховик утримує непогашену заборгованість.

Через велику розмаїтість типів страхових контрактів і способів представлення різних витрат не має особливого змісту продовжувати виклад цього питання в загальному виді. доцільніше розглянути конкретний приклад і показати, як проводити розрахунки.

Приклад. Обчислити одноразову брутто-премію для чистого дожиття терміном на 5 років для чоловіка у віці 40 років зі страховою сумою 10 тис. грн. для річної процентної ставки 5%. Витрати придбання складають 2% від страхової суми (a=0,02), витрати по зборі платежу – 3% від величини платежу $(\beta = 0{,}03)$, адміністративні витрати – 0,3% від страхової суми щороку дії поліса (γ = 0,003).

Відповідно $A_{40:\overline{5}|}^{\;\;1} = 0.728$; $\ddot{a}_{40:\overline{5}|} = 4{,}424$; П = (0,728 + 0,02 + 0.003 х 4,424) / 0,47 = 0.785.

Сума платежу дорівнює 7850 грн. Структура брутто-премії: нетто-премія — 92,75%, навантаження — 7,25%, у тому числі витрати зборів — 3%, витрати придбання —2,55, адміністративні витрати — 1.7%.

7. СТРАХОВІ РЕЗЕРВИ ПО СТРАХУВАННЮ ЖИТТЯ

7.1. Основні положення. Перспективний і ретроспективний резерви

У попередній главі величина страхових нетто-внесків визначалася з умови рівності очікуваної поточний вартості очікуваних страхових виплат і очікуваної поточний вартості внесків. Іншими словами, основа для розрахунку страхових внесків — рівність фінансових зобов'язань страховика (очікувана поточна вартість очікуваних страхових виплат) і фінансових зобов'язань страхувальника (очікувана поточна вартість страхових внесків). Однак такий баланс зобов'язань існує тільки в момент укладення договору. Після сплати страхувальником одноразового (чи першого) внеску цей баланс порушується: страхувальник уже виконав свої зобов'язання (чи частина їх), а страховику тільки має бути це зробити протягом усього терміну дії договору, для чого йому необхідно зарезервувати засоби, що надійшли. Знову баланс настане після закінчення терміну дії договору, коли і страхувальник, і страховик цілком виконають свої зобов'язання.

Необхідність наявності страхових резервів обумовлена тимчасовим розривом між надходженням страхової премії і її витратою на страхові виплати. Оскільки страхова премія по договорах страхування завжди надходить раніше, ніж відбуваються страхові випадки і провадяться страхові виплати, те необхідно резервувати її на майбутнє для забезпечення страхових виплат шляхом створення страхового фонду.

Можна провести аналогію між динамікою величини страхового фонду і динамікою рівня рідини в резервуарі, у якому рідина спочатку надходить упорядкованими порціями (внески), а потім неупорядковано, випадковими порціями й у випадкові моменты часу випливає (виплати). У страхуванні стік має випадковий, чи стохастический, характер по двох причинах: по-перше, заздалегідь невідомо, коли відбудеться страховий випадок, по-друге, невідомий розмір страхового відшкодування в кожному конкретному випадку. Рівень рідини в резервуарі увесь час знаходиться у русі: він то підвищується за рахунок накачування рідини (надходження страхової премії), те знижується за рахунок стоку (страхових виплат).

Якщо в початковий момент часу в порожній резервуар "залити таку кількість рідини" (внести одноразову премію), що, згідно із розрахунками імовірності, випливає з нього за визначений період часу *T*, то по закінченні цього періоду резервуар виявиться порожнім. У будь-який проміжний момент часу **t** "кількість рідини в резервуарі" (суму страхового резерву) можна визначити двома способами:

1) як різниц. між обсягами поступившей спочатку і витеклої за цей час рідини;

2) як кількість рідини, що, відповідно до розрахунків, повинне витекти за час, що залишився до закінчення періоду, коли резервуар спорожніє.

Оскільки обсяги, які надійшли і витекли за весь термін рідини рівні, то обидва цих методи дають, природно, той самий результат. Перший метод розрахунку в застосуванні до страхового резерву називають ***ретроспективним,*** оскільки він заснований на обліку *минулих* надходжень і виплат. Ретроспективний резерв визначається як різниця між поточною вартістю премії, що надійшла, і поточною вартістю страхових виплат за минулий період часу (природно, тут мова йде про розрахункову, а не про фактичну величину виплат).

Другий метод розрахунку зветься ***перспективного,*** оскільки для розрахунку використовуються значення *майбутніх* виплат. Перспективний резерв при одноразовій сплаті страхової премії визначається як поточна вартість очікуваних страхових виплат.Якщо ж страхова премія вноситься у розстрочку, то перспективний резерв визначається як поточна вартість майбутніх виплат мінус поточна вартість майбутніх надходжень премії.

У конкретних обчислювальних схемах використовується те визначення резерву, що більш зручне для розрахунків; для аналізу ж завжди більш наочний ретроспективний підхід, що відповідає природному розвитку процесу від минулого до сьогодення.

При аналізі фактичної діяльності страхової компанії корисно порівнювати розрахунковий і фактичний рівні страхових виплат, чи розрахунковий і фактичний рівні ретроспективного страхового резерву. Якщо має місце систематичне перевищення фактичних виплат над розрахунковими, то це сигнал про необхідність скорегувати базисні припущення, використані при розрахунку страхової премії.

7.1.1. Еквівалентність ретроспективного і перспективного методів

Обидва методи розрахунку страхового резерву дають абсолютно ідентичні результати, якщо сумарні зобов'язання страховика і страхувальника збалансовані. Покажемо це для сумарного страхового резерву (страхового фонду), рівного сумі всіх індивідуальних страхових резервів, на прикладі страхування на дожиття терміном на *n* років. Якщо страхові внески сплачуються на початку кожного року страхування, то поточна вартість страхового фонду на кінець *t*-го року страхування, відповідно до ретроспективного методу,

$$ {}_tF^r = P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \sum_{k=0}^{t-1} l_{x+k}\, s^{t-k} . \tag{158}$$

де індекс *r* указує на ретроспективний метод.

Очевидно, що поточна вартість страхового фонду на момент закінчення страхування повинна бути дорівнює сумі одиничних страхових виплат по дожиттю

$$ {}_nF^r = P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k}\, s^{n-k} = l_{x+n} \tag{159}$$

Представивши (159) у виді двох сум (від $k=0$ до $k=t-1$ і від $k=t$ до $k=n-1$), з урахуванням (158) одержимо

$$ {}_tF^r = \Big(l_{x+n} - P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \sum_{k=t}^{n-1} l_{x+k}\, s^{n-k}\Big) v^{n-t} + P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \sum_{k=0}^{t-1} l_{x+k}\, s^{t-k} = $$
$$ = l_{x+n}\, v^{n-t} - P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \sum_{k=t}^{n-1} l_{x+k}\, v^{k-t} = {}_tF^p . \tag{160}$$

Останнє співвідношення у (160) являє собою різниця між поточною вартістю майбутньою страхової виплати і поточною вартістю майбутніх страхових нетто-внесків, що цілком еквівалентно перспективному визначенню поточної вартості фонду. Очевидно, що перспективний і ретроспективний методи дають зовсім ідентичну величину індивідуального страхового резерву, рівного поточної вартості фонду в момент часу *t*. діленої на число доживших до віку $x + t$.

Діючи аналогічним образом, легко довести еквівалентність перспективного і ретроспективного підходів при страхуванні життя на випадок смерті терміном на *n* років. Відповідно до ретроспективного методу, поточна вартість страхового фонду на кінець *t*-го року страхування

$$ {}_tF^r = P^1_{x:\overline{n}|}\sum_{k=0}^{t-1} l_{x+k}\, s^{t-k} - \sum_{k=0}^{t-1} d_{x+k}\, s^{t-(k+1)} . \tag{161}$$

На момент укладення договору страхування *(t = n)* поточна вартість фонду дорівнює нулю, оскільки до кінця терміну вся зібрана нетто-премія повинна бути виплачена у зв'язку зі страховими випадками

$$ {}_nF^r = P^1_{x:\overline{n}|}\sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k}\, s^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} d_{x+k}\, s^{n-(k+1)} = 0 . \tag{162}$$

Віднімаючи зі (161) вираження (162), помножене на v^{n-1}, одержимо

$$ {}_tF^r = P^1_{x:\overline{n}|}\sum_{k=0}^{t-1} l_{x+k}\, s^{t-k} - \sum_{k=0}^{t-1} d_{x+k}\, s^{t-(k+1)} - \left(P^1_{x:\overline{n}|}\sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k}\, s^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} d_{x+k}\, s^{n-(k+1)} \right) v^{n-t} = \sum_{k=t}^{n-1} d_{x+k}\, v^{k+1-t} - P^1_{x:\overline{n}|}\sum_{k=t}^{n-1} l_{x+k}\, v^{k-t} \equiv {}_tF^p . \tag{163}$$

Аналогічним способом можна довести еквівалентність перспективного і ретроспективного методів для будь-якого виду страхування.

7.2. Страхування на чисте дожиття

7.2.1. Перспективний метод

Найбільш просто розраховується величина резерву при одноразовій сплаті страхового внеску. У цьому випадку величина страхового резерву для довільного моменту часу дорівнює очікуваної поточний вартості страхової суми на момент оцінки резерву. Для одиничної страхової суми величина страхового фонду на кінець *t*-го полЅсного року ${}_tF = v^{n-t}\, l_{x+n}$.

Тоді індивідуальний страховий резерв

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = {}_tF / l_{x+t} = v^{n-t}\frac{l_{x+n}}{l_{x+t}} = A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ 1} . \tag{164}$$

У випадку, коли страхові внески сплачуються щорічно протягом усього терміну дії договору (тобто вичікувальний період відсутній), страховий резерв на кінець *t*-го року страхування (до сплати внеску за *t* +1 -й рік) дорівнює різниці між очікуваною поточною вартістю виплат і очікуваною поточною вартістю майбутніх внесків

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ 1} - P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}\,\ddot a_{x+t:\overline{n-t}|} . \tag{165}$$

Другий доданок є вартістю ренти пренумерандо на термін *n-t* для страхувальника у віці *x+t* із щорічними платежами величиною $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$.

Тоді одержимо

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}}\cdot\frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}} . \tag{166}$$

7.2.2. Рекурентні формули

Цей же результат легко можна одержати за допомогою рекурентних формул, що зв'язують значення резерву за два сусідніх роки

$$l_{x+t}\,({}_tV + P)\,s = {}_{t+1}V\, l_{x+t+1}\,. \tag{167}$$

Інакше кажучи, величина страхового фонду на кінець t +1 -го року дорівнює нарощеної за рік сумі його величини на кінець попереднього року і страхової премії за t + 1 -й рік. Для простоти індекси, які не змінюються, тут опущені. Звідси одержимо

$${}_{t+1}V = \frac{s\, l_{x+t}}{l_{x+t+1}}\,({}_tV + P) = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}\,({}_tV + P)\,. \tag{168}$$

7.2.3. Ретроспективний метод

До сплати першого внеску резерв дорівнює нулю. Після сплати першого внеску на початку першого року страхування величина страхового резерву буде дорівнює P. Протягом року ця сума буде наростати за рахунок нарахування відсотків і до кінця першого року складе: , ${}_1V = P\, l_x\, s / l_{x+1}$. До кінця другого року ми будемо мати: V- - $=({}_1V + P)\, l_{x+1}\, s / l_{x+2}$, і т.д. Роблячи послідовні обчислення починаючи з кінця першого року, у результаті одержимо

$${}_tV = P\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\cdot\frac{D_x}{D_{x+t}}\,\ddot{a}_{x:\overline{t}|} = \frac{D_{x-n}}{D_{x-1}}\,\frac{N_x - N_{x-t}}{N_x - N_{x-n}} \tag{169}$$

Приведений вище розрахунок резерву ретроспективним методом дає такий же результат, як і при застосуванні перспективного методу. На практиці рідко вдається одержати для реального страхового плану замкнуту компактну формулу для страхового резерву. Тому звичайно проводять чисельні розрахунки резерву на кінець кожного року ретроспективним методом, використовуючи той факт, що на початку першого року величина резерву дорівнює нетто-внеску. Значення ж резерву на початок кожного наступного року одержують, додаючи до його значення на кінець попереднього року величину нетто-внеску.

На практиці момент розрахунку страхового резерву лише в рідких випадках збігається з моментом закінчення чергового страхового року. Звичайно страхові резерви розраховуються або на кінець звітного періоду (кварталу, року), або на момент дострокового припинення договору з метою визначення викупної суми. У першому випадку інтервал часу від довільного моменту укладення договору до кінця календарного року складає, як правило, неціле число років. Так, наприклад, якщо договір укладений у середині червня, то до кінця календарного року договір буде діяти 6,5 місяця, тому величину страхового резерву за цим договором на кінець року потрібно буде розрахувати для моменту часу t = 6,5/12 =13/24 . В другому випадку як момент укладення договору, так і момент його припинення довільні, і тільки по чистій випадковості інтервал часу між ними може складати ціле число років.

Найпростішим способом визначення страхового резерву на довільний момент часу в межах *t*-го року страхування є лінійна інтерполяція його значень на початку року і наприкінці року *V* — на графіку ці крапки з'єднуються прямою лінією (див. рис. 16). Лінійний характер зміни індивідуального страхового резерву усередині року обумовлений конкуренцією двох складових, що лінійно змінюються в часі:

а) лінійного приросту всього страхового фонду за рахунок нарахування відсотків і б) лінійного приросту частки кожного лінійного росту, що дожив за рахунок, кількості смертей учасників страхування з початку року.

Якщо інтервал часу від початку *t-го* року страхування до моменту оцінки резерву складає величину τ ($0<\tau<1$), то величина резерву визначається співвідношенням

$$ {}_{t-1+\tau}V = ({}_{t-1}V + P)(1-\tau) + \tau\ {}_tV \qquad (170)$$

Приклад. Жінка у віці 40 років застрахована на дожиття на термін 5 років. Визначити величину страхового внеску і величину страхового резерву на початок і кінець кожного року. Норму прибутковості прийняти рівної 5% річних.

Необхідні для розрахунків значення комутаційних функцій дані в табл. 5. значення N_{40} =218 027 .

Величина щорічного внеску

$$P_{40:\overline{5|}}^{\ 1} = \frac{D_{45}}{N_{40}-N_{45}} = \frac{10\,265}{218\,027-157\,658} = 0{,}17 .$$

Таблиця 5

t	D_{40+t}	N_{40+t}	${}_tV_{40:\overline{5|}}^{\ 1}$	${}_tV_{40:\overline{5|}}^{\ 1}$ +P
1	12694	204 654	0,179	0,349
2	12045	191 960	0,368	0,538
3	11 425	179915	0,567	0,737
4	10832	168490	0,777	0,947
5	10265	157658	1,000	

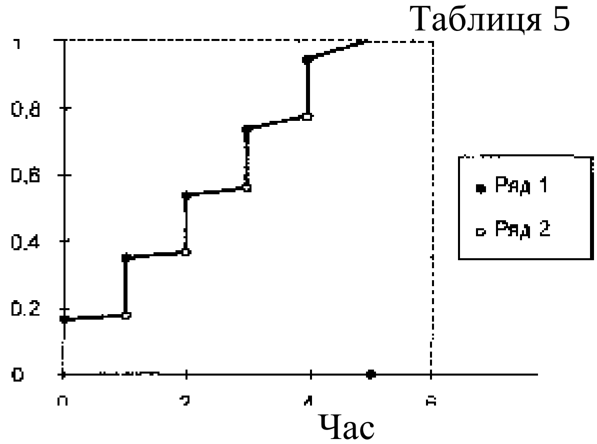


Рис. 16. Страховий резерв при страхуванні на дожиття терміном на 5 років зі сплатою внесків протягом 5 років

Графік зміни страхового резерву зображений на рис. 16. Мітки ряду 1 (кружки) показують величину страхового резерву на початок кожного року; мітки ряду 2 (окружності) — на кінець відповідного року.

Якщо період сплати внесків менше терміну страхування, то розрахунок резерву виробляється за допомогою наступної формули

$$ {}_tV = A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ 1} - \begin{cases} P\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}; & t<m \\ 0; & t\ge m \end{cases}, \qquad (171)$$

Приклад. Для даних попереднього прикладу прийняти тривалість періоду сплати внесків у 3 роки.

Результати розрахунків приведені в табл. 6 і на рис. 17.

Страхові резерви по дожиттю

Таблиця 6

Жінк Вік 40 Нетто-внесок 0,2693

Рік	Резерв на початок року	Резерв на кінець року
1	0,26934	0,28374
2	0,55308	0,58288
3	0,85222	0.89850
4	0,898505	0,94767
5	0,947675	1
6	0	0

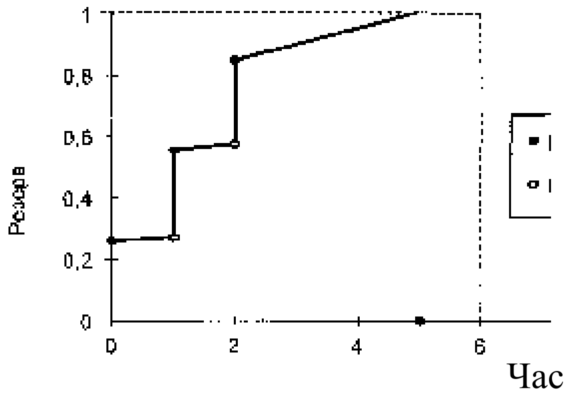


Рис. 17. Страховий резерв при страхуванні на дожиття терміном на 5 років зі сплатою внесків протягом 3 років

7.3. Страхування ренти

7.3.3. Негайна рента

При страхуванні ренти період сплати внесків передує періоду страхових виплат, тому негайні ренти оплачуються одноразовим платежем, а відстрочені ренти можуть оплачуватися також і на виплат. Розглянемо для визначеності звичайну негайну ренту з терміном, рівним *n* рокам, оплачувану разовим платежем. Для неї страховий резерв дорівнює очікуваної поточний вартості страхових виплат, чи поточної вартості зобов'язань страховика на даний момент часу. На кінець чергового *t*-го року страхування (перед черговою виплатою) очікувана поточна вартість страхових виплат звичайної ренти

$$ {}_tV_{x\bar{n}} = a_{x+t:\overline{n-t|}} + 1 = \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - \frac{N_{x+t}-N_{x+n+1}}{D_{x+t}} \qquad (172)$$

Безпосередньо після чергової виплати на початку *t*+1 -го року резерв дорівнює

$$ {}_tV_{x\bar{n}} - 1 - a_{x+t:\overline{n-t|}} - \frac{N_{x+t+1}-N_{x+n+1}}{D_{t+t}} . \qquad (173)$$

В інтервалі часу між початком і закінченням *t* +1 -го року страхування страховий резерв визначається, як і в попередньому розділі, лінійною інтерполяцією значень резерву на початку і кінці року:

$$ {}_{t+\tau}V = ({}_tV - 1)(1-\tau) + {}_{t+1}V\tau , \qquad (174)$$

де τ — інтервал часу від початку року до моменту оцінки резерву.

7.3.2. Відстрочена рента

Якщо ми маємо справу зі звичайною рентою, відстроченої на *d* років, то страховий резерв у період виплат (t > *d)* визначається приведеними вище формулами.

У період, що передує періоду виплат, страховий резерв просто дорівнює

$a_{x+d:\overline{n-d|}}$.

резерву при страхуванні на дожиття терміном на *d* років зі страховою сумою, Остаточно одержимо

$$V = \begin{cases} a_{x+t:n-t|}; & t \geq d \\ V_{x:\overline{d}|}\, a_{x+d:\overline{n-d}|}; & 0 \leq t \leq d \end{cases} \qquad (175)$$

7.4. Страхування життя

7.4.1. Страхування на термін

При страхуванні на випадок смерті величина страхового резерву на кінець /-го року страхування (безпосередньо перед сплатою внеску за ?+1-й рік) визначається формулою $_tV^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{x+t:\overline{n-t}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$.

Перший доданок у правій частині формули є очікувана поточна вартість майбутніх виплат на момент оцінки резерву (кінець *t*-го року), тобто зобов'язання страховика на цей момент часу; другий же доданок дорівнює очікуваної поточний вартості майбутніх нетто-внесків (зобов'язання страхувальника).

Величина річного страхового внеску визначається наступною формулою

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

Підставляючи в формули одержимо

$$_tV^1_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_{x+t}}\left[M_{x+t} - M_{x+n} - P^1_{x:\overline{n}|}(N_{x+t} - N_{x+n})\right]. \qquad (176)$$

На початку *t*+1-го року (після сплати чергового річного внеску) величина резерву збільшується на суму внеску і дорівнює $_tV^1_{x:\overline{n}|} + P^1_{x:\overline{n}|}$.

Якщо страхові виплати провадяться безпосередньо після смерті, то резерв називають безупинним *(continues reserve)* $_t\overline{V} = \frac{i}{\ln(1+i)}\,{}_tV$

Приклад. Жінка у віці 40 років застрахована на випадок смерті на термін 5 років. Визначити величину страхового внеску і величину страхового резерву на початок і кінець кожного року. Норму прибутковості прийняти рівної 5% річних.

Необхідні для розрахунків значення комутаційних функцій дані в табл. 7, значення N_{40} =218014, M_{40}=2990.

Величина щорічного внеску

$$P^1_{40:\overline{5}|} = \frac{M_{40} - M_{45}}{N_{40} - N_{45}} = \frac{2990 - 2758}{218\,027 - 157\,646} = 0{,}00384$$

Таблиця 7

t	D_{40+t}	N_{40+t}	M_{40+t}	$_tV^1_{40:\overline{5}|}$	$_{t-0}V^1_{40:\overline{5}|}$
1	12694	204654	2948	0.00071	0,0045
2	12045	191960	2904	0,0012	0,0050
3	11 425	179915	2857	0.0011	0.0049
4	10832	168490	2809	0.00083	0,00467
5	10265	157658	2758	0.000	

При виплаті страхової суми безпосередньо після смерті отримані вище результати потрібно помножити на $i/\ln(1 + i) = 1{,}025$. Графік залежності безупинного страхового резерву від часу для цього прикладу наведений на рис. 18.

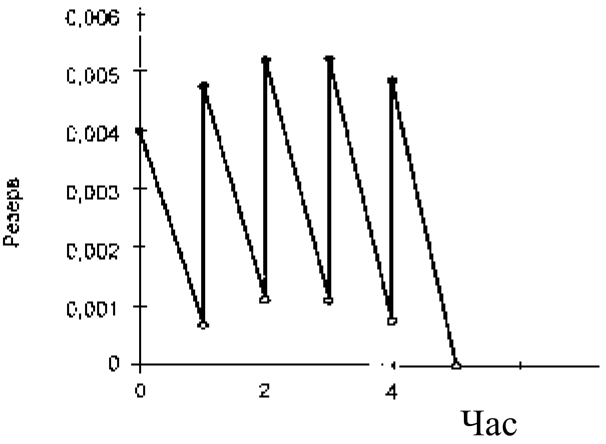


Рис. 18. Страховий резерв при страхуванні на випадок смерті терміном на 5 років

З малюнка видно, що в початковий момент часу резерв дорівнює внеску, внесеному за перший рік, потім відбувається лінійне зменшення величини резерву аж до кінця першого року страхування за рахунок здійснення страхових виплат по страхових випадках, що відбувався протягом року. На початку другого року резерв стрибком збільшується в результаті надходження страхового внеску за другий рік, потім знову відбувається його лінійне зменшення, потім знову стрибкоподібне збільшення при надходженні внеску за третій рік і т.д.

Лінійний характер зміни індивідуального страхового резерву усередині року обумовлений конкуренцією двох складових, що лінійно змінюються в часі: а) лінійного приросту капіталу за рахунок нарахування відсотків і б) лінійного збільшення числа страхових випадків і відповідно суми страхових виплат з часом.

Розглянемо більш детально динаміку зміни величини резерву на кінець кожного страхового року протягом терміну дії договору. З малюнка видно, що в перші два роки страхова премія вище рівня виплат, за третій рік їхнього значення порівнюються, в останні два роки рівень виплат вище надходить річної премії і накопичений раніше страховий резерв до кінця терміну страхування виявляється цілком витраченим. Такий характер зміни резерву обумовлений тим, що смертність застрахованих протягом терміну страхування росте, а розмір внеску визначається її середнім рівнем. Оскільки в перші роки рівень смертності нижче середнього рівня, те річна премія перевищує виплати; в останні ж роки рівень смертності вище за середнє рівня, і річної премії недостатньо для страхових виплат – витрачається накопичений раніше резерв.

Слід зазначити, що такий ріст смертності з віком спостерігається протягом життя людини не завжди. У дитячому віці смертність зменшується з віком від 1 року приблизно до 10-12 років. Тому при страхуванні життя дітей на невеликий термін середній рівень смертності за термін страхування може виявитися нижче її рівня в перші роки, що приведе до перевищення виплат над внесками під час відсутності накопиченого резерву, тобто до негативного значення резерву. У цьому випадку дефіцит засобів прийдеться погашати за рахунок інших договорів. Альтернативою може служити застосування нестандартних методик розрахунку величини страхових внесків, що допускають нерівномірне надходження страхової премії: більше — у перші роки страхування і менше — в останні.

7.4.2. Рекурентні формули

При комп'ютерних розрахунках звичайно розрахунки роблять за допомогою рекурентних формул, що зв'язують значення резерву за два сусідніх роки. При страхуванні життя одержимо ${}_{t+1}V\, l_{x+t+1} = ({}_tV + P)\, l_{x+t}\, s - d_{x+t}$, тобто величина страхового фонду наприкінці t+1-го року дорівнює нарощеної за рік сумі його значення наприкінці попереднього року і страхової премії за t+1-й рік мінус страхові виплати за t+1 -й рік. Цю формулу можна переписати в наступному виді:

$$({}_tV + P)s = {}_{t+1}V\, p_{x+t} + q_{x+t} \qquad (177)$$

Ця формула називається формулою Феклера. Задаючи нульове значення для резерву на початку страхування, за допомогою цієї формули легко послідовно обчислити резерви на кінець кожного року страхування.

7.4.3. Премія ризику і премія заощадження

Щорічно надходить премію зручно представити у виді суми двох складових: ***премії ризику*** P^r, призначеної для оплати страхових випадків протягом даного року, і ***премії заощаджень*** P^N, призначеної для створення резерву, з якого будуть виплачуватися страхові суми наприкінці терміну страхування. Представляючи формулу Феклера у виді $P = v\,{}_{t+1}V - {}_tV + q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V) \equiv P^N_{t+1} + P^r_{t+1}$ і визначаючи премію ризику і премію заощадження як $P^r_{t+1} = q_{x+1}(1 - {}_{t+1}V)$; $P^N_{t+1} = {}_{t+1}V\,v - {}_tV$, можна для кожного року страхування визначити, яка частина нетто-премії йде на страхові виплати, а яка – на заощадження. Якщо премія сплачується протягом усього терміну страхування, то, як ми тільки що бачили з попереднього прикладу, протягом першої половини терміну премія заощадження позитивна (тобто внески перевищують виплати), а протягом другої половини терміну премія заощадження негативна і страхові виплати забезпечуються за рахунок накопиченого резерву, оскільки внески менше виплат. При укороченому періоді сплати премії премія заощаджень, як правило, позитивна протягом усього періоду, формуючи резерв для забезпечення виплат протягом терміну, що залишився, коли премія вже не буде надходити.

7.4.4. Довічне страхування

При довічному страхуванні звичайно указується вік p, по досягненні якого поліс повинний бути цілком оплачений. Тривалість періоду сплати премії тоді складає $m = p - x$. Формула для страхового резерву в цьому випадку має вид

$${}_tV = A_{x+t} - \begin{cases} P\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}; & t < m \\ 0; & t \ge m \end{cases}. \qquad (178)$$

При довічному страхуванні премія заощаджень протягом усього періоду сплати премії позитивна, формуючи резерв для забезпечення виплат протягом терміну, що залишився.

7.5. Резерв премій, навантажених на витрати

7.5.1 Нетто-резерв і резерв витрат

Резерв навантажених на витрати премій містить у собі нетто-резерв і резерв витрат. Витрати, пов'язані з інкасацією страхових премій, не вимагають резервування, вони оплачуються відразу ж після одержання премій. Інші витрати по способі їхньої оплати розділяють на два типи:

• витрати придбання поліса, що оплачуються безпосередньо після висновку контракту з першого внеску (комісійні страхових агентів, витрати на медичне обстеження);

• інші витрати, що оплачуються протягом усього періоду сплати внесків у виді відрахувань з кожного внеску (адміністративні і проч.).

Витрати придбання оплачуються відразу ж по укладення договору, з першого внеску. З цієї причини величина суми, що відкладається в нетто-резерв із першого внеску для забезпечення майбутніх страхових виплат, буде менше, ніж перша нетто-премія. Таким чином, витрати придбання оплачуються за рахунок першої нетто-премії, у результаті чого утвориться дефіцит нетто-резерву. Цей дефіцит покривається поступово за рахунок виконаних страхувальником подальших платежів протягом усього періоду сплати внесків (тривалістю m років).

Дефіцит нетто-резерву є величина поточної заборгованості по погашенню витрат придбання поліса. Оскільки погашення заборгованості здійснюється за допомогою ренти пренумерандо, то величина поточної заборгованості дорівнює поточної вартості ренти на кінець t-го року страхування:

$$D^{\alpha}_{t:\overline{m|}} = P^{\alpha}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} = \alpha\,\frac{N_{x+t}-N_{x+m}}{N_x-N_{x+m}} \times \frac{D_x}{D_{x+t}}. \qquad (179)$$

Починаючи з другого року витрати придбання вже не будуть відніматися з внесків, що надходять, тому з кожним новим внеском резерв премій буде зростати і наближатися по своїй величині до нетто-резерву, з яким він зрівняється наприкінці періоду сплати внесків.

7.5.2. Цильмеровський резерв

Модифікований резерв премій, рівний різниці нетто-резерву і поточній заборгованості по погашенню витрат придбання, ще називають цильмеровским, на честь математика Цильмера, що детально исследовали це питання. Цильмеровський резерв на кінець t-го року страхування

$${}_tV^{z} = {}_tV \quad \begin{cases} P^{\alpha}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}; & t < m \\ 0; & t \ge m \end{cases}; \qquad P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}. \qquad (180)$$

Величина цильмеровского резерву на початок t-го року

$$ {}_{t}V^{Z} = {}_{t-1+n}V \quad \begin{cases} P^{\alpha}\left(\ddot{a}_{x+t-1:\overline{m-1-t}|} - 1\right); & t < m \\ 0; & t \geq m \end{cases} \tag{181} $$

Для обчислення величини цильмеровского резерву в довільний момент часу τ протягом t-го року, як правило, досить лінійної інтерполяції між значеннями двох попередніх формул

$$ {}_{t-1+\tau}V^{Z} = {}_{t-1}V^{Z}(1-\tau) + {}_{t}V^{Z}\tau . \tag{182} $$

Величина частини щорічної премії, призначеної для створення цильмеровского резерву, дорівнює щорічної брутто-премії за винятком її частини, призначеної для покриття адміністративних витрат і витрат на інкасацію.

$$ \Pi^{Z}\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = A + \alpha;\ \Pi^{Z} = P + P^{\alpha};\ P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}};\ P^{\alpha} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} . \tag{183} $$

де A — поточна вартість очікуваних страхових виплат; P — щорічний нетто-внесок; Π^{Z} -щорічний цильмеровський внесок.

Розглянемо як ілюстрацію обчислення цильмеровского резерву для страхування на дожиття, вважаючи, що внески сплачуються щорічно протягом усього терміну страхування *(m=n)*. Величина цильмеровского резерву на початку першого року страхування дорівнює різниці між цильмеровским внеском і витратами придбання: ${}_{0}V^{Z} = \Pi^{Z} - \alpha$.

Одноразовий спосіб оплати витрат придбання накладає природні обмеження на їхню величину – очевидно, вони не можуть перевищувати величини першого внеску (зменшеного на суму витрат по інкасації і відрахувань на адміністративні витрати): $\Pi^{Z} \geq \alpha$. Визначимо величину цильмеровского внеску і цильмеровского резерву для максимальної величини витрат придбання. Дорівнюючи до нуля початковий цильмеровський резерв і підставляючи в (183), одержимо

$$ \tilde{\alpha} = \Pi^{Z} = \frac{D_{x+n}}{D_{x}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\left(1 + \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1}\right) = \frac{D_{x+n}\, l_{x}}{D_{x}\, v\, l_{x+1}\, \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} = $$
$$ = \frac{D_{x+n}}{D_{x+1}\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} = P_{x+1:\overline{n-1}|} , \tag{184} $$

Згідно (184), щорічна цильмеровська премія дорівнює щорічної нетто-премії при страхуванні терміном на рік менше і таким, що починається на рік пізніше. Цей результат можна було очікувати заздалегідь, тому що перша цильмеровська премія цілком витрачається на оплату витрат придбання, а створення страхового фонду починається тільки з другого року страхування. Очевидно, що і цильмеровський резерв також дорівнює нетто-резерву страхування, що починається на рік пізніше і терміном на рік менше:

$$ {}_{t}V^{Z} = {}_{t}V_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} \tag{185} $$

При страхуванні на випадок смерті для визначення максимально припустимої величини витрат придбання потрібно більш детальний аналіз. Справа в тім, що на відміну від страхування на дожиття тут нетто-резерв до кінця першого року страхування убуває майже до нуля (див. рис. 18), тому найбільш тверде обмеження на величину витрат придбання накладає умову незаперечності цильмеровского резерву до кінця першого року. Іншими словами, від першого внеску варто залишити рівно стільки, щоб вистачило на виплати протягом першого року. Максимальна величина витрат придбання визначається з умови рівності нулю цильмеровского резерву (182) наприкінці першого року

$$ {}_1V - P^{\alpha}\ddot{a}_{x-1:\overline{n-1|}}; \quad \tilde{\alpha} = {}_1V \frac{a_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x-1:\overline{n-1|}}}. \tag{186} $$

Відзначимо, що співвідношення (186), як і (182), справедливо не тільки для страхування на випадок смерті, але і для будь-якого виду страхування.

7.5.3. Дострокове припинення договору, викуп поліса

Якщо страхувальник бажає достроково припинити договір страхування, то виникає питання: яку частину сплачених раніше внесків страховик повинний йому повернути? Повернення засобів при достроковому припиненні договору зветься ***викупу поліса,*** а сума, що підлягає поверненню, називається ***викупний.*** Ясно, що повернути страхувальнику цілком його внески з нарахованими на них відсотками страховик просто не в змозі – частина їх уже виплачена у виді комісійних агенту, а частина витрачена на адміністративні витрати. Тому максимальна викупна сума, що може виплатити страховик без збитку для себе, – це величина цильмеровского резерву на момент розірвання договору плюс поточна вартість майбутніх адміністративних витрат (резерву на адміністративні витрати). У дійсності виплачується менша сума, для того щоб захистити страхувальників, що залишилися, від можливості несприятливої селекції, тому що отказавшиеся від страхування є найменш ймовірними одержувачами страхових сум.

При страхуванні на дожиття терміном на *n* років починаючи з віку *x* викупна сума на кінець ***t***-го року страхування (187)

$$ S_V = {}_tV^{Z} \quad {}_tV_{x+t:\overline{n-t|}}. $$

Ця формула справедлива для максимальної величини витрат придбання. Для довільної величини витрат викупна сума визначається формулою (182).

7.5.4. Конверсія поліса у вільне від премій страхування

У прямого зв'язку з величиною викупної суми знаходиться питання про конверсію (перетворенні) поліса. Часто з часом страхувальнику виявляється важко сплачувати внески колишньої величини, тому він бажає зменшити величину внесків або взагалі перестати їх платити. В останньому випадку говорять про конверсію поліса в оплачене страхування, тобто в таке страхування, при якому надалі не потрібно платити ніяких премій. Результатом є зменшення розмірів страхової суми. Такі поліси називають оплаченими, а знижена страхова сума називається оплаченої. Розглянемо страхування на дожиття терміном на *n* років починаючи з віку x, по якому страхувальник наприкінці /-го року страхування прийняв рішення про припинення сплати внесків. Таке рішення еквівалентне рішенню укласти договір страхування на дожиття на що залишилися n-t років зі сплатою одноразового внеску в розмірі викупної суми. Нова страхова сума визначиться з умови рівності очікуваної поточний вартості страхової виплати й адміністративних витрат і викупної суми:

$$Sv = S(A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ 1} + \gamma \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}); \quad S = \frac{Sv}{A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\ \ \ 1} + \gamma \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}. \qquad (188)$$

Аналогічно розраховуються скорочені суми для страхований на випадок смерті і для змішаного страхування.

Загальний принцип, виходячи з який визначаються нові умови договору при будь-якій його зміні:

очікувана поточна вартість майбутніх страхових виплат + *майбутніх витрат* - *майбутніх премій до зміни* = *очікуваній поточний вартості майбутніх страхових виплат* + *майбутніх витрат* - *майбутніх премій після зміни*

8. СТРАХОВІ ПРЕМІЇ І СТРАХОВІ ТАРИФИ В РИЗИКОВОМУ СТРАХУВАННІ

8.1. Основні принципи розрахунку страхової премії

Страхування на термін тривалістю в 1 рік і меншеше прийнято називати короткостроковим. Якщо страхування не передбачає нагромадження засобів, то таке страхування називають ризиковим. Розрахунок страхової премії в ризиковому страхуванні відрізняється від відповідного розрахунку при довгостроковому страхуванні життя необхідністю обліку флуктуації сумарного розміру виплат. Причиною помітних флуктуацій рівня страхових виплат є велика мінливість імовірності страхової події і ступеня збитку протягом року і від року до року, а також менша кількість страхових подій протягом терміну дії договору. Остання обставина утрудняє застосування законів великих чисел для розрахунку необхідного розміру страхової премії. У силу цих причин для опису ризикового страхування необхідно послідовний розгляд імовірності подій.

Требв помітити, що по самій своїй суті страхування покликане звести до мінімуму роль випадковості, тому сфера застосування розрахунку ризику при страхуванні обмежена випадком невеликі флуктуації фінансових показників. Дана обставина дозволяє взяти за основу середні значення цих показників, а для опису флуктуационных виправлень використовувати спрощений підхід, заснований на законі нормального розподілу.

Перш ніж перейти до принципів розрахунку основної частини страхової премії, згадаємо елементарні поняття теорії імовірностей. Під імовірністю якої-небудь події розуміється відношення числа випадків, коли ця подія відбувається, до загального числа випадків, коли воно в принципі моглася відбутися. У страхуванні під імовірністю страхової події q за визначений період часу, наприклад рік, розуміють відношення кількості страхових випадків n за цей період до числа застрахованих об'єктів *N*: $q = n/N$.

8.1.1. Основна частина нетто-ставки

Спочатку розглянемо найбільш просту ситуацію, коли в результаті страхового випадку відбувається повне знищення застрахованого об'єкта. Якщо страхова сума дорівнює *S*, то сумарна величина страхового відшкодування складе $Z = n\,S$.

Для забезпечення виплати страхового відшкодування величина сумарної страхової нетто-премії повинна дорівнювати очікуваній величині страхових виплат. Виходячи з цього величина страхової нетто-премії, стягнутої за один застрахований об'єкт, тобто величина страхового нетто-внеску, складе $Pn_0 = Z/N = qS$.

Індекс "0" означає, що це тільки основна частина нетто-внеску, розрахована без обліку флуктуації величини сумарного страхового відшкодування.

Звичайно в страховій теорії розраховують величину страхового внеску з одиничної страхової суми (*S*=1), називану тарифною чи ставкою просто тарифом. Для основної частини тарифної нетто-ставки одержимо

$$Tn_0 = Pn_0/S = q \,. \qquad (189)$$

Приклад. Визначити основну частину тарифної нетто-ставки і нетто-внеску при страхуванні на випадок смерті в результаті нещасливого випадку. Імовірність страхового випадку протягом року дорівнює q = 0,002, страхова сума S = 10 тис. грн.

Основна частина тарифної нетто-ставки і нетто-внеску складають

$T_{n0} = q$ = 0,002 (0,2%); $P_{n0} = q\,S$ = 200 грн.

8.1.2. Частковий збиток

Повна загибель застрахованого об'єкта в результаті страхового випадку скоріше виключення, чим правило. Для обліку часткового ушкодження застрахованого об'єкта вводиться поняття ***ступеня знищення,*** чи ваги збитку для застрахованого об'єкта. Величина страхового відшкодування *B* в цьому випадку менше страхової суми, а їхнє відношення і є коефіцієнтом ваги збитку $b = B/S$.

З урахуванням неповного знищення застрахованого об'єкта в результаті страхового випадку формули (6,1.2) і (6.1.3) для основної частини тарифної нетто-ставки і страхового нетто-внеску приймуть вид

$$P_{n0} = Z/N = \overline{B}\, n/N = q\,\overline{B}\,; \quad T_{n0} = Pn_0/S = q\,\overline{b}\,, \qquad (190)$$

де риса над *B* и *b* означає, що беруться середні значення.

Приклад, Визначити основну частину тарифної нетто-ставки при страхуванні від вогню, якщо імовірність страхового випадку дорівнює q =0,013, середнє значення ступеня знищення об'єкта дорівнює $\overline{b}$ = 0,5.

Відповідно до формули (190), основна частина тарифної нетто-ставки складе T_{n0} = 0,5 x 0,013 = 0,0065 (0,65%).

8.1.3. Збитковість

При аналізі звітної статистичної інформації широко використовується поняття ***збитковості страхової суми***, рівної відношенню сумарного відшкодування по страхових випадках, що відбувся в звітному періоді, до сукупної страхової суми застрахованих об'єктів:

$$y = \sum_{i=1}^{n} B_i \Big/ \sum_{k=1}^{N} S_k = \frac{n\bar{B}}{N\bar{S}} = q\bar{b}, \tag{191}$$

де $\bar{B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B_i$; $\bar{S} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} S_k$; $\bar{b} = \bar{B}/\bar{S}$ відповідно середнє значення величини страхового відшкодування, страхової суми і коефіцієнта ваги збитку.

Знаючи кількість страхових випадків і загальне число застрахованих об'єктів, за допомогою формули (191) можна зі статистичних даних визначити середню вагу збитку, що надалі буде використана при розрахунку тарифних ставок.

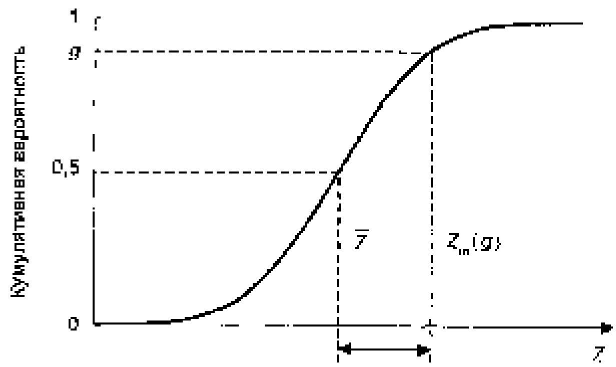
8.1.4. Верхня межа очікуваних збитків і ризикова надбавка

У ризикових видах страхування імовірність того, що фактичний рівень виплат перевищить очікуване середнє значення, складає приблизно 0,5, і цією обставиною не можна зневажити. Відхилення фактичного рівня виплат від очікуваного значення у велику сторону можна визначити як ризик. Ніж ширше діапазон можливих відхилень, тим вище ризик.

Невизначеність кінцевого результату ставить досить складну задачу для аналітика. З одного боку, розмір страхової премії має бути достатній для забезпечення страхових виплат навіть у самій несприятливій ситуації, інакше страховика чекає руйнування. З іншого боку, можливо, хоча і вкрай малоймовірно, що в самому несприятливому випадку сумарна страхова виплата виявиться рівній сукупній страховій сумі всіх застрахованих об'єктів. Якщо збирати страхову премію в такому розмірі, то страхування втрачає зміст: внесок дорівнює страхової вартості об'єкта, а страховий випадок може і не відбутися. Звідси ясно, що реальний розмір страхової премії, що збирається, що не повинний помітно перевищувати середній рівень виплат, не може зі стовідсотковою гарантією забезпечити перевищення внесків над виплатами в будь-якій ситуації. Мова може йти про 95%-й гарантії, 90%-й гарантії і т.д., тобто про ризик виявитися в збитку з імовірністю 5%, 10% і т. д.

Кількісна оцінка ризику можлива тільки тоді, коли відомий розподіл імовірностей для величини сумарної страхової виплати, тобто імовірність реалізації кожного можливого її значення. У результаті вийде інтервал можливих значень суми грошових виплат, згрупованих по ступені їхньої імовірності. Такий "профіль ризику" дозволяє аналітику оформити свої інтуїтивні розуміння в кількісній формі приблизно в наступному виді: "9 шансів з 10, що рівень виплат не перевищить значення Z_m чи, що еквівалентно: "імовірність того, що рівень виплат перевищить значення Z_m складає 10%". Призначаючи сумарну страхову премію в розмірі Z_m ми можемо бути упевнені, що з імовірністю 90% зібраних грошей вистачить на страхові виплати.

Принцип визначення верхньої суми страхових виплат із заданим рівнем надійності g для конкретного "профілю ризику" ясний з рис. 19. На ньому зображена залежність кумулятивної, чи накопиченої, імовірності від значення верхньої межі сумарної страхової виплати. Вибираючи фіксоване значення верхньої границі на осі абсцис, ми одержуємо з графіка імовірність того, що фактичне значення суми виплат виявиться менше цього значення. Чим вище обране значення Z_m тим вище імовірність того, що фактична сума виплат виявиться менше Z_m Навпаки, якщо ми задаємо рівень надійності оцінки верхньої межі g, то, опускаючи на вісь абсцис перпендикуляр із крапки перетинання заданого рівня ординати з графіком, одержуємо гарантоване значення верхньої границі $Z_m(g)$. Часто величину g називають ще рівнем гарантії чи безпеки просто гарантією безпеки. Чим вище рівень g, тим більше високе значення $Z_m(g)$ варто вибрати, щоб забезпечити з імовірністю g неперевищення цього значення фактичною сумою виплат.



Сума виплат

Рис. 19. Кумулятивна імовірність суми страхових виплат

Різниця між рівнем верхньої межі і середнім значенням суми страхових виплат дає діапазон можливих (з імовірністю g) несприятливих відхилень рівня страхових виплат. Звичайно ця величина складає одне-три средньоквадратичених відхилення σZ величини Z від її середнього значення. Тому цю різницю звичайно записують у виді

$$Z_m(g) - \bar{Z} = \alpha(g)\sigma Z, \tag{192}$$

де коефіцієнт $a(g)$ у залежності від рівня гарантії безпеки g приймає значення від 1 до 3. Значення $a(g)$ для заданих значень g розраховуються на підставі таблиць обраного закону розподілу.

Величина сумарної страхової премії повинна бути достатньою для забезпечення страхових виплат, тому її дорівнюють до максимальної величини очікуваної суми страхових виплат $Z_m(g)$. Мова, звичайно, йде про нетто-премію, призначеної тільки для покриття збитків; повна премія (брутто-премія) повинна містити в собі ще і витрати страховика на проведення страхування.

Страховий внесок-нетто-внесок, чи страхова нетто-премія, стягнута з одного страхувальника, дорівнює сумарній нетго-премии, діленій на число договорів страхування:

$$Pn = Z_m/N = \bar{Z}\,(1 + a\sigma Z/\bar{Z})/N = Pn_0\,(1 + a\,VZ), \tag{193}$$

де $VZ = \sigma Z/\overline{Z}$ — коефіцієнт варіації розміру сумарного страхового відшкодування.

Прийнято розділяти нетто-премію на дві частини: основну нетто-премію і ризикову надбавку, призначену для компенсації несприятливих (позитивних) флуктуацій величини рівня страхових виплат. Основній нетго-премії відповідає перший доданок у (193), ризиковій надбавці – друге:

$$Pn = Pn_0 + Pn_r; \quad Pn_0 = \overline{Z}/N; \quad Pn_r = \alpha Pn_0 VZ. \tag{194}$$

Аналогічно для тарифної нетто-ставки

$$Tn = Tn_0 + Tn_r; \quad Tn_0 = \overline{Z}/SN; \quad Tn_r = \alpha Tn_0 VZ. \tag{195}$$

Після введення основних понять, використовуваних при розрахунку страхових тарифів, розглянемо це питання більш детально. В основі економіки страхування лежить принцип розподілу збитку, понесеного деякими, між всіма учасниками страхування. При цьому розподіл збитку в часі може носити як локальний, так і нелокальний характер.

Під ***локальним розподілом*** збитку розуміють відшкодування збитків, що происшли за визначений період часу, тільки за рахунок страхових премій учасників страхування, сплачених у цей період часу. Іншими словами, у відшкодуванні збитку беруть участь тільки ті страхувальники, що у даний період мають діючі договори страхування. Звичайно такий тип розподілу збитку характерний для масових видів страхування з досить великим терміном страхування (звичайно 1 рік): медичне страхування, страхування автотранспорту і т.п. При цьому очікувана кількість страхових випадків за цей період повинна помітно перевищувати 10.

Розподіл збитку в часі ***нелокального*** характеру звичайно для видів страхування з коротким терміном дії договорів, наприклад для страхування пасажирів, туристів, вантажів і т.п. Страхові випадки тут відбуваються далеко не щораз протягом терміну дії договору, а для здійснення страхової виплати явно недостатньо засобів, зібраних з, що бере участь у даний момент у страхуванні. Для виплати використовуються засоби страхового фонду, накопичені раніше за рахунок внесків інших учасників страхування. При нелокальному розподілі збитку страхові премії по завершених договорах страхування повинні резервуватися для здійснення майбутніх страхових виплат.

Для розрахунку тарифів звичайно використовують статистичні дані за рік: збитковість, імовірність страхового випадку, вага збитку і т.п. Вибір тимчасової бази в 1 рік обумовлений необхідністю згладити сильні сезонні коливання показників, властивій більшості видів страхування. Однак навіть річні показники найчастіше змінюються від року до року, щоправда, уже не настільки сильно, як внутри року. Тому в розрахунках використовують значення показників, усереднені за ряд років протягом визначеного періоду, називаного тарифним. Тривалість тарифного періоду вибирається досить великий, щоб виявити основні закономірності зміни річних показників. Якщо показники випробують досить регулярні коливання навколо середнього значення, то тривалість тарифного періоду варто вибрати рівної цьому періоду. Якщо показники мають стійку тенденцію до росту (зниженню), то тарифний період повинний бути таким, щоб ця тенденція сформувалася і її можна було виділити на тлі коливань (звичайно 7-12 років). Узагалі варто помітити, що обробка статистичних даних ближче до мистецтва, чим до строгої математичної науки.

На практиці часто приходиться користатися статистикою за більш короткі інтервали часу, тому потрібно з великою обережністю підходити до обліку тенденцій збитковості (особливо до зниження!) при розрахунку тарифів. Крім того, недолік статистичних даних приводить до необхідності збирати страхові премії з запасом, щоб забезпечити виконання страховиком зобов'язань при несприятливій зміні збитковості.

8.2. Розподіл утрат (збитків) і величини сумарного позову

Вище була розглянута найбільш проста ситуація, коли розміри вимог про страхову виплату (позовів) по всіх страхових випадках рівні між собою. Вона виникає насамперед при страхуванні життя. У цьому страховому випадку завжди цілком виплачується страхова сума. У більшості ж випадків розмір вимог про страхову виплату є випадковою величиною, навіть якщо страхові суми по всіх договорах страхування однакові. Розподіл розмірів окремих вимог про виплату називають ***розподілом утрат (збитків).*** Закон розподілу втрат може бути заданий таблицею, чи графіком формулою.

8.2.1. Нормальний розподіл сумарного позову

У більшості випадків конкретний вид розподілу втрат не грає істотної ролі, оскільки сума позовів, пред'явлених страховику (величина сумарного позову), звичайно залежить тільки від середньої величини і дисперсії збитку. Справа в тім, що якщо кількість страхових випадків значно перевищує одиницю *(ti”\)*, той розподіл сумарного позову, як правило, є нормальним:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi DZ}} \exp\left[-\frac{(Z-\overline{Z})^2}{2DZ} \right] \tag{196}$$

де — $Z = \sum_{k=1}^{n} B_k; \quad \overline{Z} = \overline{n}\,\overline{B}$ величина і середнє значення суммарного

позову; *DZ*— дисперсія сумарного позову; $\overline{n}$, $\overline{B}$ — середні значення числа страхових випадків і величини страхової виплати.

Твердження про те, що сума великого числа доданків завжди розподілена за нормальним законом незалежно від того, які закони розподілу доданків, складає зміст центральної граничної теореми — основної теореми теорії імовірностей.

Функція розподілу сумарного позову

$$F(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi DZ}} \int_0^Z dz \exp\left[-\frac{(z-\overline{Z})^2}{2DZ} \right]. \tag{197}$$

Формулу (197) зручно перетворити заміною $a = (z-\overline{Z})/\sqrt{DZ}$, перейшовши до стандартного нормального розподілу, для якого маються великі таблиці, а також стандартна функція НОРМРАСП в електронних таблицях Excel:

$$N(\alpha;0;1) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2). \tag{198}$$

Відзначимо, що нижня межа в (198), яка дорівнює $-\overline{Z}/\sqrt{DZ}$ <<-1, заміненf на -∞, оскільки щільність нормального розподілу в цій області пренебрежимо мала. Задаючи імовірність *g* того, що величина сумарного позову не перевищить значення *Z„,(g)*, одержимо рівняння для визначення цього очікуваного максимального значення сумарного позову

$$N(\alpha(g);0;1) = g; \qquad Z_m(g) = \overline{Z} + \alpha(g)\sqrt{DZ}. \tag{199}$$

Значення a_g називається 100*g*%-м квантилем розподілу *N*(0;1) (таблиця квантилей для деяких значень *g* приведена нижче). Задаючи значення гарантії безпеки *g*, із приведеної нижче табл. 8 чи з довідника визначаємо величину a_g, а потім знаходимо $Z_m(g)$. Більш докладний ряд значень можна визначити за допомогою статистичної функції Excel НОРМОБР. Таблиця 8

8	0.84	0,90	0,93	0,95	0.99
a	1,00	1,28	1,48	1,64	2,33

Величина сумарної страхової нетто-премії повинна бути достатньої для забезпечення страхових виплат, тому неї дорівнюють до очікуваної максимальної величини сумарного позову. Величина страхового внеску визначається в загальному виді формулами (197) — (199), де $\sigma Z = \sqrt{DZ}$ (середньоквадратичене відхилення є корінь з дисперсії).

8.2.2. Коефіцієнт варіації. Ризикова надбавка

Для обчислення ризикової надбавки необхідно обчислити коефіцієнт варіації сумарного позову, для чого у свою чергу потрібно визначити його дисперсію. У курсі теорії імовірностей доводиться, що дисперсія суми (сумарного позову) випадкового числа незалежних однаково розподілених (н.о. р.) величин (страхових виплат) дорівнює

$$DZ = \bar{n}\,DB + \bar{B}^2 Dn;\quad Z = \sum_{k=1}^{n} B_k\,. \tag{200}$$

де DB, Dn— дисперсії величини страхової виплати і кількості страхових випадків. З урахуванням (200) формула для коефіцієнта варіації величини сумарного позову здобуває вид

$$VZ = \frac{\sqrt{\bar{n}\,DB + \bar{B}^2 Dn}}{\bar{n}\,\bar{B}} = \sqrt{VB^2/\bar{n} + Vn^2} \tag{201}$$

З урахуванням формули (6.2.11) остаточно одержимо

$$VZ = \sqrt{\frac{VB^2 + 1}{\bar{n}}} = \sqrt{\frac{1 + VB^2}{Nq}} = \sqrt{\frac{1 + Vb^2}{Nq}}\,. \tag{202}$$

де $b = B/S$ — ступінь знищення, чи вага збитку.

У найпростішому випадку, коли усі виплати однакові і дисперсія їхнього рівня дорівнює нулю. маємо

$$VZ = Vn = 1/\sqrt{\bar{n}}\,. \tag{203}$$

Формула (203) також дає непогане наближення, якщо коефіцієнт варіації рівня страхових виплат значно менше одиниці.

Приклад 1. Визначити тарифну нетто-ставку і нетто-внесок при страхуванні на випадок смерті в результаті нещасливого випадку. Імовірність страхового випадку протягом року q = 0,002, страхова сума S =10 000 грн., кількість застрахованих N-=3000, рівень гарантії безпеки (імовірність перевищення страхової премії над виплатами) прийняти рівним g = 0,95.

Визначимо основні частини тарифної нетто-ставки і нетто-внеску:

$T_{n0} = q$ = 0,002 (0,2%); $P_{n0} = qS$ = 200 грн. Очікуване середнє число страхових випадків за рік $\bar{n} = qN$ =0,002х3000=6.

Рівню гарантії безпеки g = 0,95 згідно табл. 8 відповідає значення коефіцієнта a = 1.64.

Тоді ризикові надбавки такі

$T_{n0} = aTn_0/\sqrt{n}$ = 1,64x0,002/√6 = 0,0013 ;P_{n0} -=STn_r =130 грн.

Значення нетто-ставки і нетто-внеску відповідно:

$Tn = Tn_0 + Tn_r$ = 0,002 + 0,0013 = 0,0033 ; $Pn = Pn_0 - Pn_r$ =330 грн.

Приклад 2. Визначити тарифну нетто-ставку при страхуванні від вогню, якщо імовірність страхового випадку q = 0,013, кількість застрахованих об'єктів N = 500, середнє значення ступеня знищення об'єкта $\overline{b}$ = 0,5, середньоквадратичне відхилення від середнього значення дорівнює σb = 0,2 ; рівень гарантії безпеки g прийняти рівним 0,9.

Основна частина тарифної нетто-ставки Tn_0 = 0,5 x 0,013 = 0,0065 (0,65%). Очікуване середнє число страхових випадків за рік $\overline{n} = qN = 0{,}013 \times 500 = 6{,}5$. Рівню гарантії безпеки g=0,9, згідно табл. 8, відповідає значення коефіцієнта a = 1,28. Коефіцієнт варіації ступеня збитку $Vb = \sigma b/\overline{b}$ = 0,4 . Тоді ризикова надбавка відповідно Tn_r = $Tn_0\sqrt{(1+Vb^2)/\overline{n}} = 1{,}28 \times 0{,}0065\sqrt{1{,}16/6{,}5}$ =0,0035.
Значення нетто-ставки $Tn = Tn_0 + Tn_r$ = 0,0065 + 0,0035 = 0,01 (1%).

Середнє значення і коефіцієнт варіації ваги збитку визначаються на підставі відповідних статистичних даних. Статистичні дані групуються за значеннями ваги збитку, для чого весь діапазон можливих змін цього показника розбивається на ряд рівних інтервалів, чи осередків. Якщо діапазон змін лежить у межах від нуля до одиниці, а число осередків дорівнює 10, то в перший осередок попадають страхові випадки з вагою збитку від нуля до 0,1, у другу – від 0,1 до 0,2 і т.д. Для розрахунків приймається, що величина ваги збитку для усіх випадків, що потрапили в даний осередок, відповідає її значенню в центрі осередку: для першого осередку – 0,05, для другий – 0,15 і т.д. Розподіл страхових випадків по вазі збитку характеризується відповідною частотою, рівної відношенню числа страхових випадків, що потрапили в даний осередок з індексом k, *до* загального числа страхових випадків n: $v_k = n_k /n$. Тоді середнє значення, дисперсія і коефіцієнт варіації ваги збитку визначаються наступними формулами:

$$\overline{b} = \frac{1}{n}\sum^{K} n_k b_k = \sum_{k=1} v_k b_k$$

$$Db = \sum_{k=1}^{K} n_k (b_k - \overline{b})^2 /(n-1); \quad Vb = \frac{\sqrt{Db}}{\overline{b}}. \tag{204}$$

де n — загальна кількість страхових випадків; n_k та $v_k = n_k / n$ — кількість і частка страхових випадків, коли вага збитку дорівнює b_k; K— загальне число груп, на які розділені всі страхові випадки по вазі збитку.

:

Приклад 3. Розрахувати тарифну нетто-ставку для страхування тимчасової непрацездатності в результаті нещасливого випадку виходячи з рівня виплат 0,5% страхової суми за день непрацездатності. Імовірність нещасливого випадку q = 0,08 . кількість застрахованих N=1000, рівень гарантії безпеки g прийняти рівним 0,95. Розподіл (умовне) тривалості тимчасової непрацездатності (у днях) у результаті нещасливих випадків приведене в табл. 9. У верхньому рядку таблиці — середні по відповідному осередку значення тривалості непрацездатності (з інтервалом 5 днів), у нижній – частка випадків, коли реалізується це значення.

Таблиця 9

Тривалість	2,5	7.5	12.5	17.5	22,5	27.5	32,5	37,5	42.5	47,5
Частка випадків	0.01	0.02	0,05	0.15	0,2	0,25	0,15	0,1	0,05	0,02

За даними таблиці середня тривалість непрацездатності $\overline{t}$ = 26,5 дня, середньоквадратичне відхилення σt =8,8 дня, коефіцієнт варіації $Vt = \sigma t/\overline{t}$ = 0,33 . Очевидно, коефіцієнт варіації ваги збитку дорівнює коефіцієнту варіації тривалості непрацездатності Vb = 0,33 . Середнє значення ваги збитку виходить множенням середньої тривалості непрацездатності на частку страхової суми, виплачувану за день непрацездатності: $\overline{b} = 0.005\,\overline{t}$ = 0,005 x 26,5 = 0,133 .

Основна частина тарифної нетго-ставки $Tn_0 = q\,\overline{b}$ =0,08x0,133=0,0106 (1,06%).

Середнє число страхових випадків $\overline{n} = qN$= 0,08x1000 =80;

$$VZ = \sqrt{\frac{1+Vb^2}{\overline{n}}} = \sqrt{\frac{1+0,33^2}{80}} = 0,118$$

Рівню гарантії безпеки g=0,95, згідно табл. 8, відповідає значення коефіцієнта a = 1,64. Тоді, ризикова надбавка $Tn_r = a\, Tn_0 VZ$ = 1,64 x 0,0106 x 0,118 = 0,0021 (0,21 %). Повна нетто-ставка складає:Tn = 0,0106 + 0,0021 = 0,0127 (1,27%).

Якщо збільшувати число договорів $\{N \to \infty$), то коефіцієнт варіації величини сумарного позову буде прагнути до нуля, а сама величина позову – до свого середнього значення. Тим самим роль флуктуації буде знижуватися зі збільшенням портфеля договорів, тобто буде підвищуватися ступінь передбачуваності величини суми страхових виплат. Це дозволить збирати страхову премію в такому розмірі, щоб з високим ступенем надійності забезпечити перевищення внесків над виплатами, іншими словами, вирішити основну задачу страховика.

8.3. Вплив зміни зовнішніх умов

Вище ми думали, що імовірність страхового випадку – величина постійна і статистичний розкид кількості страхових випадків обумовлений винятково флуктуаціями, зв'язаними з кінцівкою числа діючих договорів. Як видно з формули (204), при збільшенні числа договорів коефіцієнт варіації і, отже, відносний внесок флуктуації повинні зменшуватися й у підсумку прагнути до нуля. Тоді відношення числа страхових випадків до числа договорів повинне залишатися незмінним рік за роком і рівним середньому значенню. Однак такий висновок суперечить реально існуючої ситуації, коли навіть для дуже великих компаній, що мають велику кількість договорів, відношення числа страхових випадків до числа договорів помітно міняється від кварталу до кварталу і від року до року. Пояснити цей факт можна, припустивши, що імовірність страхового випадку – величина перемінна, котра залежить від різних умов, що змінюються, у першу чергу від погодних і геофізичних факторів. Наприклад, при незмінному числі договорів кількість страхових випадків за рік при страхуванні від нещасливих випадків залежить від кількості днів з поганою погодою в році.

Для простоти в цьому розділі будемо розглядати флуктуації величини сумарного позову, зв'язані ***тільки*** зі зміною ***зовнішніх умов.*** Портфель договорів страхової компанії будемо припускати досить великим, щоб можна було зневажити флуктуаціями, зв'язаними з кінцевими розмірами страхового портфеля. Іншими словами, ми будемо вважати кількість договорів нескінченним і враховувати только флуктуації, зв'язані зі зміною імовірності страхового випадку від одного періоду страхування до іншого. Якщо термін договору – один рік, то від року до року; якщо один квартал, то від кварталу до кварталу і т.д.

8.3.1. Розрахунок тарифів на основі середнього значення

Поряд із флуктуаціями імовірності страхового випадку можливі також зміни ваги збитку від року до року. Вище ми розглядали вплив кожного з цих факторів окремо, але при наявності статистичних даних по збитковості за кілька років такий поділ утрачає зміст, оскільки в підсумку для розрахунку тарифів нам потрібно тільки значення збитковості, а не її складових. Нагадаємо, що ***збитковість страхової суми*** дорівнює величині сумарного позову, що приходиться на одиницю сукупної страхової суми $y=Z/SN$.

Основна частина тарифної нетто-ставки дорівнює середньому значенню збитковості, а ризикова надбавка визначається як

$$Tn = Tn_0 + Tn_r;\quad Tn_0 = \bar{y};\quad Tn_r = \alpha Tn_0 VZ = \alpha Tn_0 Vy, \tag{205}$$

де $Vy =- \sigma y/\bar{y}$. Середнє значення і дисперсію збитковості вважаються рівними їх вибірковим значенням, отриманим шляхом обробки статистичних даних:

$$\tilde{y} = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} y_l;\quad \tilde{D}y = \frac{1}{k-1}\sum_{l=1}^{k}(y_l-\tilde{y})^2;\quad \sigma y = \sqrt{\tilde{D}y}, \tag{206}$$

де l=1,2,..., k — порядковий номер року (кварталу), за який беруться значення збитковості. Значення $a(g)$ легко знайти по заданій гарантії безпеки з табл. 8.

Приклад. Розрахувати тарифну нетто-ставку по страхуванню від вогню майна підприємств. Вихідні дані для розрахунку – значення збитковості по страхуванню від вогню майна підприємств за останні 5 років.

Роки	1	2	3	4	5
Збитковість, %	0,605	0,706	0,725	0,715	0,694

Визначимо середню збитковість і її середньоквадратичне відхилення за формулами (206): $\overline{y}$ = 0,689%; $\sigma y = \sqrt{D}y$ = 0,048%; $Vy = \sigma y\,/\,\overline{y}$ = 0,07 .

Для обчислення середнього значення і среднеквадратического відхилення зручно використовувати статистичні функції Excel СРЗНАЧ і СТАНДОТКЛОН.

Задаючи рівень гарантії безпеки g = 0,95 . одержимо з табл. 7 σ=1,64. Обчислюючи за формулами (206) ризикову надбавку і нетто-ставку, одержимо

$$Tn_0 = \overline{y} = 0{,}689\%; \qquad Tn_r = \alpha Tn_0 Vy = 0{,}079\%;$$

$$Tn = 0{,}768\% \,.$$

8.3.2. Розрахунок тарифів на основі тенденції зміни збитковості

Часто статистичні дані по збитковості виявляють виражену тенденцію до росту чи убуванню. У цьому випадку розрахунки, засновані на середнім значенні збитковості за період спостережень, дадуть систематичну погрішність у прогнозі майбутнього значення збитковості. Більш точним є прогноз, заснований на побудові лінії тренда за даними за період спостережень. Пряма тренда, що згладжує дані, що спостерігаються, проводиться між річними значеннями таким чином, щоб середньоквадратичне відхилення цих значень від лінії тренда було мінімальним. Процедура побудови ряду згладжених значень і прогнозу майбутніх значень здійснюється в електронних таблицях Excel за допомогою статистичної функції ТЕНДЕНЦІЯ.

Приклад. Визначити тарифну нетто-ставку і нетто-внесок при страхуванні на випадок смерті в результаті нещасливого випадку. Вихідні дані для розрахунку – статистичні дані по кількості страхових випадків за останні 6 років. Оскільки ступінь збитку в цьому виді страхування завжди дорівнює 1, то збитковість просто дорівнює імовірності страхового випадку.

Роки	1	2	3	4	5	6	7
Збитковість, %	0,126	0,134	0.142	0.173	0.227	0.251	—
Згладжені значення	0.108	0,135	0,162	0,189	0,216	0,242	0.269

В другому рядку таблиці приведені статистичні дані за останні 6 років, у третьому рядку – їх згладжені за допомогою лінійного тренда значення, в останньому стовпці цього рядка – очікуване значення збитковості на наступний рік, отримане продовженням лінії тренда за межі інтервалу спостереження. Основна частина тарифної нетто-ставки дорівнює очікуваному значенню збитковості. Середньоквадратичне відхилення фактичних значень збитковості від згладжених значень, визначене за формулою за допомогою статистичної функції СТАНДОТКД дорівнює 0,015%. Виходячи з рівня гарантії безпеки g = 0,95

(a = 1,64), одержимо Tn_0 = 0,269%; $T_r = a\sigma y$ = 1,64 x 0,015 = 0,025% ;Tn = 0,294% .

8.3.3. Оцінка параметрів розподілів по малих вибірках. Вплив розміру вибірки на величину ризикової надбавки

Якщо величина k статистичної вибірки, на підставі якої розраховуються середнє і дисперсія вибірки, невелика, то результати, отримані вище, можна розглядати тільки як наближення до точного значення. Справа в тім. що вибіркові значення середнього і дисперсії, отримані з вибірки невеликого розміру, можуть істотно відрізнятися від точних (але невідомих нам) значень. Відхилення вибіркових значень від точних можуть бути як більше, так і менше нуля і самі є випадковими величинами, розподіленими за якимсь законами. Очевидно, що імовірність великих відхилень невелика і прагне до нуля при збільшенні розмірів вибірки. Теорія розподілу відхилень вибіркових значень від точних у залежності від розмірів вибірки була розроблена Стьюдентом. Тому приведемо остаточні результати для функції розподілу, отримані шляхом усереднення формули (206) по всіх можливих відхиленнях середнього і дисперсії на основі законів їхніх розподілів

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} dt\, s_{k-1}(t) = S_{k-1}(\alpha),$$

де $s_{k-1}(t) = \dfrac{B_{k-1}}{(1+t^2/(k-1))^{k/2}}$; $B_{k-1} = \dfrac{\Gamma(k/2)}{\Gamma((k-1)/2)\sqrt{\pi(k-1)}}$ щільність розподілу Стьюдента з k-1 ступенями свободи; Γ — гамма-функція; $\alpha = (y-\tilde{y})/\sqrt{\tilde{D}y(k+1)/k}$;

$S_{k-1}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} dt\, s_{k-1}(t)$ — функція розподілу Стьюдента.

Графік функції розподілу в залежності від коефіцієнта a приведений на рис. 20. Задаючи гарантію безпеки g і дорівнюючи цьому значенню функцію розподілу $F(a)$, знаходимо значення $a(g)$, що відповідає цій гарантії безпеки. Для того щоб виразити відхилення від середнього безпосередньо через вибіркове середньоквадратичне відхилення, уведемо величину $Z(t) = Z\dfrac{T}{T}\, a(g,k) = a(g)\sqrt{(k+1)/k}$. Тоді з імовірністю g максимальна очікувана величина збитковості буде дорівнювати $y_m(g) = \tilde{y} + a(g,k)\sqrt{D_y}$ Основна частина нетто-ставки і ризикова надбавка рівні відповідно:

$$Tn_0 = \tilde{y}; \quad Tn_r = \alpha(g,k)\sqrt{\tilde{D}y}; \quad Tn = Tn_0 + Tn_r. \tag{207}$$

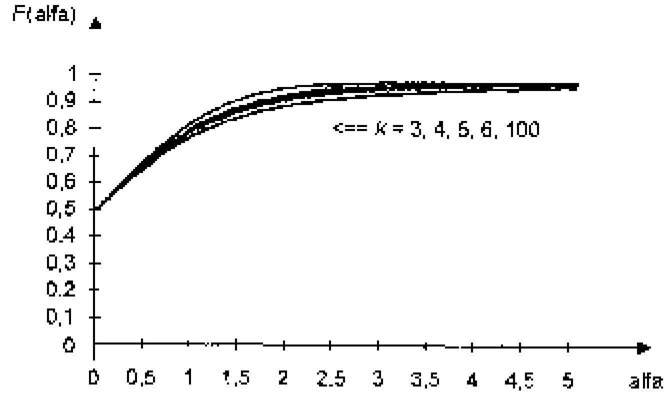


Рис. 20. Функція розподілу *F(a)* з урахуванням розміру вибірки *k*

Облік кінцевості вибірки, як і варто було очікувати, уплинув тільки на величину ризикової надбавки, залишивши без зміни основну частину нетто-ставки. У табл. 10 приведені результати розрахунків *a(g,k)* для найбільш уживаних значень гарантії безпеки.

Таблиця 10

Величина відносини ризикової надбавки до середньоквадратичного відхилення *a{g, k)* у залежності від гарантії безпеки *g* і розміру вибірки *k*

*k**g*	0,8	0.85	0,9	0,95
3	1,224744	1.600653	2,177325	3,371711
4	1,093965	1,397294	1,831055	2,631140
5	1,030775	1,303105	1,679543	2,335321
6	0,993220	1,248372	1,594138	2,176502
100	0,849483	1,047087	і ,296596	1,668673

Приклад. Повертаючи до умов попереднього прикладу, зробимо розрахунок ризикової надбавки з урахуванням розмірів вибірки: *k* = 5. Задаючи рівень гарантії безпеки *g* = 0,95, одержимо з таблиці $a(g,k) = 2.18$ (у попередньому прикладі значення *a(g,k)* = 1,64). Очевидно, що величина ризикової надбавки приблизно в 1,5 рази вище, ніж у попередньому прикладі 6.4.1. Остаточно одержимо $Tn_1 = 2{,}18 \times 0{,}048\% = 0{,}105\%;\ Tn = 0{,}689 + 0{,}105 = 0{,}794\%$.

8.4. Франшиза і ліміт відповідальності

Франшиза (від *.franchise* — пільга, вільність) — звільнення страховика від необхідності відшкодувати збитки, не перевищуючі визначений, заздалегідь обговорений розмір. Договір із франшизою передбачає, що страхувальник погоджується цілком приймати на себе збиток, що не перевищує межі *fr*, що називається франшизо.. Зрозуміло, що страхувальник погоджується на неповну компенсацію збитків в обмін на зниження страхового внеску.

Розрізняють ***абсолютну*** і ***відносну*** франшизу. Абсолютна франшиза визначає виражену у виді грошової суми мінімальну величину збитку, при перевищенні якої страховик зобов'язаний чи частково цілком відшкодовувати збиток. Відносна франшиза задається у вигляді визначеного відсотка від страхової суми.

Франшиза також може бути ***умовною*** чи ***безумовною.*** Якщо в договорі страхування відсутні які-небудь умови про розмір відшкодування у випадку перевищення франшизи, то передбачається, що збиток відшкодовується *за винятком* установленої франшизи. Тут ми маємо справу з безумовною франшизою. Умовна франшиза припускає звільнення від відповідальності страховика за збиток, що не перевищує франшизи, і його *повне* покриття у випадку перевищення франшизи.

При наявності франшизи розмір страхового відшкодування завжди менше розміру збитку. Це приводить до зменшення страхової премії. Розглянемо приклад, що демонструє вплив безумовної франшизи на величину страхового платежу. У табл. 11 приведені числа і частота страхових випадків за рік з різним відсотком збитку для страхування житлових будинків від пожежі (на 1 млн.. застрахованих об'єктів *(N*=1 000000)).

Середнє значення відсотка збитку дорівнює 9,5%, середньоквадратичне відхилення — 17,2%, коефіцієнт варіації — 1,8, загальне число вимог про відшкодування збитку, одержуване підсумовуванням за всіма значеннями відсотка збитку, дорівнює n = 10 000. Отже, імовірність страхового випадку дорівнює $q = n/N$ = 0,01.

Таблиця 11

Розподіл збитку

Відсоток ущербу *b*, %	**2,5**	**7,5**	**12.5**	**17,5**	**22.5**	**27.5**	**32.5**	**37,5**	**42.5**	**47.5**
Кількість випадків *nk*	**5318**	**3309**	**342**	**160**	**131**	**70**	**75**	**55**	**53**	**40**
Частота *vk*	**0,5318**	**0.3309**	**0.0342**	**0.016**	**0,0131**	**0,007**	**0.0075**	**0,0055**	**0,0053**	**0,004**
Відсоток ущербу *b*, %	**52,5**	**57.5**	**62,5**	**67.5**	**77.5**	**77,5**	**82.5**	**87,5**	**92 5**	**97,5**
Кількість випадків *nk*	**38**	**35**	**33**	**27**	**26**	**27**	**25**	**23**	**81**	**132**
Частота *vk*	**0.0038**	**0.0035**	**0,0033**	**0.0027**	**0.0026**	**0,0027**	**0,0025**	**0.0023**	**0.0081**	**0.0132**

Нетто-ставка для 95%-го рівня гарантії безпеки *(а* = 1,64) дорівнює

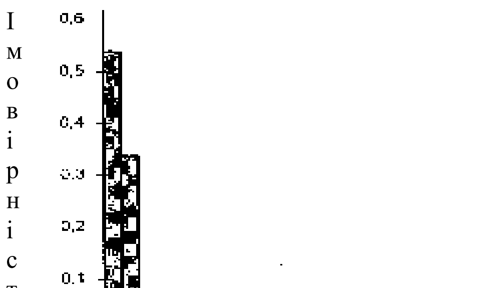
$$Tn = q\bar{b}\left(1+\alpha\sqrt{\frac{1+Vb^2}{n}}\right) = 0{,}01\times 0{,}095\times\left(1+1{,}64\sqrt{\frac{1+1{,}8^2}{10\,000}}\right) = 0{,}00096\ (0{,}096\%).$$

Аналіз табл. 11 дозволяє з'ясувати, як уплине установлення 5%-ї безумовної відносної франшизи на величину страхового платежу. Наявність франшизи приводить до того, що розмір відшкодування на 5% нижче розміру збитку. Уведення франшизи в розмірі 5% приводить до того, що всі страхові випадки з величиною збитку менш 5% (а їхнє число 5318) не оплачуються, а розподіл кількості страхових випадків по розмірах виплат являє собою зрушене вниз на 5% (на одну клітинку) розподіл кількості страхових випадків по розмірі збитку (див. табл. 12). Загальне число вимог про відшкодування збитку стає рівним 4682 — на 5318 менше, ніж без франшизи. Тому, незважаючи на те, що кількість страхових випадків, що відповідає кожній клітинці, залишилося незмінним, частота, одержувана розподілом цієї кількості на загальне число вимог про виплату, міняється. Нові значення частоти приведені для кожной клітинки в табл. 12.

Таблиця 12

Розподіл відшкодування (з 5%-ю франшизою)

Відсо-ток ущербу *b*, %	2,5	7.5	12,5	17.5	22,5	27.5	32,5	37,5	42.5	47,5
Кіль-кість ви-падків *nk*	3309	342	160	131	70	75	55	53	40	38
Частота *vk*	0,707	0.073	0.034	0,028	0,015	0.016	0,012	0.011	0.008	0,008
Відсо-ток ущербу *b*, %	52,5	57.5	62,5	67,5	72.5	77,5	82.5	87,5	92.5	
Кіль-кість ви-падків *nk*	35	33	27	26	27	25	23	81	132	
Частота *vk*	0.007	0,007	0.006	0.006	0,007	0,005	0,005	0,017	0.028	



Відшкодування, %

Рис. 21. Гистограмма розподілу відсотка збитку

Для цього нового розподілу обчислюються середнє значення відсотка страхового відшкодування, рівного 12,46%, среднеквадратического відхилення — 22,6%. коефіцієнта варіації відшкодування — 1,81. Імовірність страхової виплати дорівнює $q = n/N$ = 4682/1 000 000 = 0,00468. Нетто-ставка з 5%-ю франшизою для 95%-го рівня гарантії безпеки дорівнює

$$h = q\bar{b}\left(1+\alpha\sqrt{\frac{1+V_b^2}{n}}\right) = 0,00468\times 0,125\left(1+1,64\sqrt{\frac{1+1,8^2}{4682}}\right) = 0,0006\ (0,06\%).$$

Отриманий вище результат виглядає досить впечатляюще: уведення 5%-

й франшизи дозволяє в даному конкретному прикладі зменшити величину страхового платежу в 1,6 рази. Звичайно, такий результат отриманий завдяки тому, що велика частина збитків не перевищувала 5% від страхової суми (див. табл. і рис. 21); для іншого розподілу збитків (відсотка збитку) ефект уведення франшизи може виявитися не настільки істотним.

Запишемо загальні співвідношення для розрахунку характеристик розподілу відшкодувань при наявності безумовної франшизи. Якщо величина франшизи дорівнює fr, то величина страхового відшкодування визначається як

$$\begin{cases} 0; & x \le fr \\ x - fr; & x > fr \end{cases}, \qquad (208)$$

де x — розмір збитку. Нехай усі страхові випадки згруповані по "осередках", що відповідають різним розмірам збитку. Якщо f — порядковий номер осередку, для якої нижня границя розміру збитку дорівнює fr, то всі страхові випадки, згруповані в осередках з номерами $k < f$. не оплачуються. Кількість вимог про оплату, тобто кількість оплачуваних страхових випадків, дорівнює

$$n(f) = n - \sum_{k<f} n_k = n\Big(1 - \sum_{k<f} \nu_k\Big) = n(1 - F(fr)), \qquad (209)$$

де $F(fr) = \sum_{k<f} V_k$ — кумулятивна частота для розмірів збитку, що не перевищують fr. Тоді нові частоти для оплачуваних страхових випадків будуть наступними

$$\nu_k(f) = n_k / n(f) = \nu_k / (1 - F(fr)). \qquad (210)$$

Середнє, дисперсія і коефіцієнт варіації для розподілу виплат, що представляє собою "зрушений" розподіл збитку, визначаються формулами, аналогічними

$$\bar{B} = \frac{1}{n(f)} \sum_{k}^{K} n_k B_k = \sum_{k \ge f}^{K} \nu_k(f)(X_k - fr); \quad DB = \sum_{k \ge f}^{K} n_k(f)(X_k - fr - \bar{B})^2 / n(f); \quad VB = \frac{\sqrt{DB}}{\bar{B}}. \qquad (211)$$

8.4.1. Ліміт відповідальності

Інший метод впливу на величину страхового відшкодування — уведення ***ліміту відповідальності.*** Якщо величина збитку менше ліміту відповідальності, то величина страхового відшкодування дорівнює величині збитку, в іншому випадку величина страхового відшкодування дорівнює ліміту відповідальності. Ліміт відповідальності вводиться для того, щоб відітнути одиничні страхові відшкодування, величина яких може бути значно вище гнітючого числа страхових виплат.

У табл. 11 приведений розподіл величини страхового відшкодування (в умовних одиницях) для одного з видів страхування відповідальності (перший і другий рядки таблиці). Загальне число страхових випадків складає 395. Нижні рядки (n(2); n(1,5); n(!)) показують розподіл відшкодування при введенні ліміту відповідальності L = 2; 1,5:1.

Таблиця 11

Розподіл величини страхового відшкодування при різних значеннях ліміту відповідальності

B	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
n	12	14	25	44	68	77	59	41
$n(2)$	12	14	25	44	68	77	59	41
$n(1,5)$	12	14	25	44	68	77	59	41
$n(1)$	12	14	25	44	68	77	59	41
0,9	1	1,1	1,2	1.3	1,4	1	2	2,5
23	13	6	4	3	2	2	1	1
23	13	6	4	3	2	2	2	
23	13	6	4	3	2	4		
23	32							

На відміну від франшизи введення ліміту відповідальності не приводить до зміни кількості вимог про виплату страхового відшкодування, а тільки до зміни величини страхового відшкодування у випадку, коли перевищується ліміт відповідальності. При цьому величина страхового платежу, пропорційна сумарній виплаті, міняється незначно. Сумарна виплата без уведення ліміту складає Sb =242,7; при введенні лімітів L = 2; 1,5; 1 — відповідно $Sb(2)$ = 242,2; Sb(1,5)=241,2; Sb(\)= 236,1. Зменшення ліміту на 100% (від 2 до 1) приводить до зменшення страхового платежу усього на 2,5%. Тому введення в даному випадку страхового тарифу як платежу з одиниці страхової суми (рівної ліміту відповідальності) не має сенсу, оскільки страховий платіж не зростає пропорційно ліміту відповідальності.

8.5. Сукупність незалежних ризиків

При включенні в страховий поліс декількох незалежних ризиків очікувана величина страхових виплат являє собою суму очікуваних страхових виплат по кожному ризику окремо

$$\overline{Z} = \sum_{i=1}^{m} \overline{Z}_i , \tag{212}$$

де m -кількість незалежних ризиків.

Середнє значення, дисперсія і коефіцієнт варіації суми незалежних випадкових величин визначаються формулами

$$\overline{Z} = \sum_{i=1}^{m} \overline{Z}_i ; \quad DZ = \sum_{i=1}^{m} DZ_i ; \quad VZ = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} DZ_i} \Big/ \overline{Z} .$$

Основна частина страхового внеску і ризикова надбавка дорівнюють відповідно

$$Pn_0 = \overline{Z}/N = \sum_{i=1}^{m} Pn_{0i} ; \qquad Pn_r = \frac{\alpha}{N}\sqrt{DZ} = \frac{\alpha}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} DZ_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} Pn_{ri}^2} , \tag{213}$$

де $Pn_{rl} = \frac{a}{N}\sqrt{DZ_l}$, — ризикова надбавка до нетто-премії по *l*-му виду ризику.

Аналогічно для тарифних ставок маємо

$$Tn_0 = \sum_{l=1}^{m} Tn_{0l};\ Tn_r = \sqrt{\sum_{l=1}^{m} Tn_{rl}^{\,2}};\ Tn_{rl} = \alpha Tn_{0l} VZ_l\,. \qquad (214)$$

Приклад. Розрахувати нетто-ставку при страхуванні від нещасливих випадків. У випадку смерті в результаті нещасливого випадку страхова сума виплачується цілком, у випадку тимчасової непрацездатності виплачується допомога у розмірі 0,5% страхової суми за кожний день непрацездатності.

По першому виду ризику скористаємося результатами прикладу з п.8.1.1, по другому — результатами приклада з п. 8.1.3. Основна частина нетто-ставки дорівнює сумі відповідних величин для кожного ризику окремо:
$Tn_0 = Tn_1 + Tn_2$= 0,002 + 0.0116 = 0,0136 (1,36%). Ризикова надбавкаскладе

$$Tn_r = \sqrt{Tn_{r_1}^{\,2} + Tn_{r_2}^{\,2}} = \sqrt{0{,}0013^2 + 0{,}0022^2} =$$

$$= 0{,}0026\ (0{,}26\%);$$

$$Tn = Tn_0 + Tn_r = 0{,}0136 + 0{,}0026 = 0{,}0162\ \ (1{,}62\%)\,.$$

У страхуванні цивільної відповідальності розмір і характер можливого збитку заздалегідь невідомі, тому не можна ввести ніякої страхової суми, зв'язаної з вартістю майна, якому може бути нанесений збиток, чи величиною страхової допомоги можливим потерпілим. Однак статистика дозволяє оцінити середні розміри і дисперсію страхових виплат і ймовірність страхового випадку, чого цілком достатньо для розрахунку розмірів страхової премії. Аналогічна ситуація існує й у страхуванні медичних витрат, де величина страхових виплат варіюється в самих широких межах у залежності від діагнозу захворювання і видів медичних послуг. Тут уводити тарифну ставку як страхову премію з одиниці страхової суми не має особливого змісту, оскільки не визначена сама страхова сума.

Приклад. Розрахувати нетто-ставку для страхування медичних витрат громадян, що виїжджають за кордон. Обсяг відповідальності містить у собі:

1) оплату медичних витрат по амбулаторній допомозі (імовірність страхового випадку (q =0,01, середня страхова виплата $\overline{B}$ = 250 дол.);

2) оплату медичних витрат по госпіталізації і лікуванню в стаціонарі, включаючи транспортування постраждалого (q = 0,0007, $\overline{B}$ = 5000 дол.);

3) витрати по репатріації у випадку смерті (q = 0,00013, $\overline{B}$ = 7000 дол.).

Передбачувана кількість застрахованих за рік N=50000. Рівень гарантії безпеки $g=0{,}95$ (a = 1,64). На основі експертних оцінок середньоквадратичне відхилення розмірів страхових виплат $\sigma B = 0.5\,\overline{B}$, тоді відповідний коефіцієнт варіації $\quad V = \sqrt{\dfrac{1 + (s_B / \bar{B})^2}{n}} = \dfrac{1{,}12}{\sqrt{n}}$

Обчислимо основну частину нетто-премії і ризикову надбавку по кожнім ризику окремо:

1) $\bar{n}_1 = q_1 N = 0{,}01 \times 50\,000 = 500$;

$Pn_{01} = \bar{B}_1 q_1 = 250 \times 0{,}01 = 2{,}5$ долл.;

$Pn_{r1} = \alpha Pn_{01} 1{,}12 / \sqrt{\bar{n}_1} = 1{,}64 \times 2{,}5 \times 1{,}12 / \sqrt{500} = 0{,}21$ долл.;

2) $\bar{n}_2 = 35$; $Pn_{02} = 3{,}5$ долл.; $Pn_{r2} = 1{,}09$ долл.;

3) $\bar{n}_1 = 6{,}5$; $Pn_{03} = 0{,}9$ долл.; $Pn_{r2} = 0{,}66$ долл.

Повна нетто-премія дорівнює:

$Pn_0 = 2{,}5 + 3{,}5 + 0{,}9 = 6{,}9$ долл.;

$Pn_r = \sqrt{0{,}21^2 + 1{,}09^2 + 0{,}66^2} = 1{,}31$ долл.; $Pn = 8{,}21$ долл.

На практиці звичайно використовується розмір нетто-премії в розрахунку на один день поїздки. Приймаючи тривалість поїздки рівної 14 дням, одержимо величину нетто-премії за день поїздки *Pnd* = *Pn*/14 = 0,59 дол.

8.6. Навантаження на витрати. Брутто-премія

Проведені вище розрахунки розміру страхової премії були засновані на рівності вартості страхових виплат і страхової нетто-премії. Нетто-премія забезпечує лише покриття очікуваних страхових виплат. Операції за страховим договором вимагають визначених витрат (витрати страхування), для покриття яких понад нетто-премію стягується ще навантаження. Сума нетто-премії і навантаження називається брутто-премією.

Звичайно розрізняють *три види* витрат.

1. *Витрати придбання (ліквідаційні витрати)* пов'язані з придбанням поліса і які складаються з комісійних страхового агента, витрат на оформлення і реєстрацію поліса, консультації, медичний огляд, рекламу і т.д.

2. *Витрати зборів* — це комісійні витрати по інкасації страхових платежів.

3. *Адміністративні витрати* містять у собі витрати по забезпеченню функціонування страхової компанії (зарплата, оренда, плата за комунальні послуги, вартість обробки даних, податки, плата за ліцензію і т.п.), а також інші витрати, що не ввійшли в попередні пункти.

Інколи до витрат придбання відносять тільки комісійні страхового агента, інші витрати, що у постійно діючій страховій компанії мають регулярний характер, – до адміністративних витрат. Такий поділ зручне тим, що оплата витрат придбання поліса відбувається в момент надходження першого внеску, тоді як оплату інших витрат важко прив'язати до якогось конкретного моменту часу. Друга перевага такого поділу в тім, що усі витрати придбання відносяться на рахунок конкретного агента за конкретним договором з конкретними терміном дії і страховою сумою, тоді як інші витрати носять загальноофісний характер і практично не залежать від характеристик договору.

У ризикових видах страхування звичайно усі витрати обчислюються як пропорційні частки страхової брутто-премії, що зв'язана з нетто-премією наступним співвідношенням:

$$Pb = Pn/(1-f), \tag{215}$$

де f— частка навантаження в брутто-премії, що у свою чергу складається з комісійних агентів, відрахувань на превентивні заходи й адміністративні витрати: $f = f_c + f_p + f_a$.

Для здійснення страхових виплат і оплати діяльності, зв'язаної з ліквідацією збитків, часто виділяють інвентарну, чи технічну, премію, рівну сумі нетто-премії й адміністративних витрат:

$$P_t = Pn + P_a = Pb(1 - f + f_a) = Pb(1 - f_c - f_p). \tag{216}$$

Вона покриває вартість страхових виплат і адміністративних витрат.

9. СТРАХОВІ РЕЗЕРВИ В РИЗИКОВОМУ СТРАХУВАННІ

9.1. Види страхових резервів

Необхідність наявності страхових резервів обумовлена часовим розривом між надходженням страхової премії і її витратою на страхові виплати. Оскільки страхова премія по договорах страхування завжди надходить раніш, ніж відбуваються страхові випадки і виробляються страхові виплати по цих договорах, те необхідно резервувати її на майбутнє для забезпечення страхових виплат шляхом створення страхового фонду.

Існує аналогія між динамікою величини страхового фонду і динамікою рівня рідини в резервуарі, у якому рідина спочатку надходить упорядкованими порціями (внески), а потім неупорядоченно, випадковими порціями й у випадкові моменты часу випливає (виплати). У страхуванні стік має випадковий, чи стохастическій, характер по двох причинах:

по-перше, заздалегідь невідомо, коли відбудеться страховий випадок, по-друге, невідомий розмір страхового відшкодування. Рівень рідини в резервуарі увесь час знаходиться в русі: він те підвищується за рахунок накачування рідини (надходження страхової премії), те знижується за рахунок стоку (страхових виплат).

Необхідна умова функціонування страхової компанії — достатня величина страхового фонду в будь-який момент часу. Для цього необхідно принаймні, щоб за фіксований інтервал часу (квартал, рік) приплив гарантированно перевищував чи хоча б компенсував джерело. Виходячи з цієї вимоги в попередній главі і визначався розмір страхової премії: оцінювався максимальний розмір сумарної виплати по всіх страхових випадках за термін дії договору, а сумарне надходження страхової премії прирівнювалося до цієї величини.

Формування страхового фонду відбувається за рахунок тієї частини страхової премії, що покриває реальну вартість страхових виплат, а також внутрішніх адміністративних витрат, пов'язаних із забезпеченням діяльності страхової компанії, це так звана технічна, чи інвентарна, премія. ***Технічна***

премія дорівнює страховій премії, що надійшла, за винятком відрахувань у резерв попереджувальних заходів і виплати комісійних агентам за продаж полісів. Технічна премія служить джерелом формування технічних резервів, необхідних для забезпечення страхових виплат по вже происшли і стоять страховим випадкам. У зв'язку з цим і технічними резервами підрозділяються на два відповідних класи: резерви збитків і резерви премій. Резерви збитків містять у собі резерв заявлених, але неурегульованих збитків (РЗНЗ) і резерв збитків, що сталися, але незаявлені (РСНЗ).

Резерви премій складаються з резерву незаробленої премії, резерву коливань збитковості і резерву катастроф. Кожен тип резерву премій зв'язаний з відповідним характером тимчасового розподілу ризику.

Резерв ***незаробленої премії*** (РНП) розраховується в припущенні про рівномірний розподіл ризику протягом терміну дії договору страхування. Така ситуація має місце, коли число страхових випадків за період страхування є великим, тобто виплати відбуваються майже безупинно. Рівень виплат при цьому приймається рівним нормативному рівню виплат, узятому за основу при розрахунку тарифів. Якщо договори страхування одночасно починаються і закінчуються, то до моменту закінчення договорів величина РНП має дорівнювати нулю.

Резерв коливань збитковості (РКЗ) призначений для згладжування коливань рівня виплат (збитковості) біля нормативного значення протягом тарифного періоду. При цьому по закінченні тарифного періоду та його частина, що сформувалася за рахунок відхилення рівня виплат від середнього значення, повинна виявитися рівною нулю, залишок же буде обумовлений нагромадженням ризикової надбавки за цей термін.

Резерв катастроф (РК) призначений для нагромадження засобів на випадок рідких (раз у 50 — 100 років) катастрофічних подій, при яких можливе ушкодження значної частини застрахованих об'єктів і буде потрібно одномоментная виплата великої суми. У силу своєї рідкості й унікальності подібні події не укладаються в статистику, і тому може бути зроблена тільки експертна оцінка необхідної величини резерву катастроф і часу його нагромадження.

9.2. Резерв незаробленої премії

Під незаробленою премією на сучасний момент часу розуміють частина технічної премії, призначеної для здійснення *майбутніх* страхових виплат по *діючим* договорах страхування з урахуванням адміністративних витрат. У свою чергу зароблена премія є нормативний (розрахунковий) рівень страхових виплат за період від моменту вступу в силу цих договорів до поточного моменту часу (також з урахуванням адміністративних витрат). У сумі зароблена і незароблена премії, природно, складають технічну премію.

9.2.1 Резерв незаробленої премії для одноразової страхової премії

Обчислимо резерв незаробленої премії (РНП) для найпростішого випадку, коли всі діючі в даний момент часу договори страхування почалися одночасно і так само одночасно закінчаться. Оскільки ризик рівномірно розподілений протягом терміну дії договорів, розрахункова (нормативна) сума страхових виплат (зароблена нетго-премия) пропорційна часу з моменту укладення договорів $Z(t) = Z\frac{T}{T}$, де Z— сумарна нетто-премія за весь термін дії договорів.

Величина сумарного резерву або резерву незаробленої нетто-премії дорівнює

$$RZ(t) = Z - Z(t) = Z(1 - \frac{t}{T}) = Z\frac{T-t}{T} \qquad (217)$$

З формули (217) видно, що величина нетто-резерву пропорційна інтервалу часу, що остались до закінчення терміну договорів. У зв'язку з цим метод розрахунку страхових резервів за формулою (217) називається методом "pro rata temporis" — пропорційно часу. Сам же резерв називають нетто-резервом незаробленої премії, оскільки він дорівнює частці нетто-премії, пропорційної не минулої частини терміну дії договору. У момент початку дії договору величина резерву дорівнює нетто-премії, що надійшла, у момент закінчення договору – нулю.

Страхова компанія резервує засоби не тільки для здійснення майбутніх страхових виплат, але і на майбутні адміністративні витрати, що рівномірно розподілені протягом часу, що залишився до закінчення договорів. Сумарний резерв незаробленої премії (технічний резерв) дорівнює нетто-резерву плюс резерв майбутніх адміністративних витрат (який також пропорційний часу, що залишився до закінчення договорів,):

$$RZ_t(t) = Z_t(1 - \frac{t}{T}) = Z_t\frac{T-t}{T}. \qquad (218)$$

де $Z_t=Z[1+f_a/(1-f)]$– технічна премія; f_a – частка адміністративних витрат у брутто-премії.

У дійсності всі договори, що укладаються, мають різні дати початку, терміни дії, страхову суму, страховий тариф. Однак оскільки збитки по кожному з договорів відразу ж розкладаються на всіх учасників страхування, то можна вважати, що, як і в страхуванні життя, премії кожного учасника формують індивідуальний резерв *V,* що убуває при кожнім страховому випадку пропорційно долі цього учасника в загальній премії. Адміністративні витрати також розкладаються пропорційно страховим преміям. Індивідуальний резерв

$$V(t) = P_t k(t); \qquad k(t) = \frac{T-t}{T}, \qquad (219)$$

де коефіцієнт ***k(t)*** показує, яка частина технічної премії "ще не зароблена". Зароблена страхова премія

$$W(t) = P_t\frac{t}{T}. \qquad (220)$$

Сумарний резерв незаробленої премії по всім діючим на момент часі *t*

$$RZ(t)=\sum_q V_q(t)=\sum_q P_{tq}\frac{T_q-(t-t_q)}{T_q},$$

договорам (221)

де t_q ,T_q— момент початку і тривалість q-го договору страхування; P_q — технічна премія за цим договором.

Для розрахунку РНП традиційно використовуються чотири пропорційних методи. Вони залежать від угруповання дат початку договору, що можуть бути, наприклад, щоденними, щомісячними і т.д. ^

9.2.2. Метод 365-х часток

Найбільш точний із застосовуваних методів. Тут дати початку договорів групуються по днях. Тривалість року приймається 365 дням.

Приклад. 1 серпня страхова компанія уклала договір страхування терміном на 1 рік з оплатою страхової премії одноразовим внеском у розмірі 60 тис. грн. Частка страхової премії, призначеної для виплати комісійних за укладення договору, —20%, частка відрахувань на превентивні заходи — 10%. Визначити резерв незаробленої премії: а) на кінець III кварталу; б) на кінець року.

Величина технічної премії: 60x(1 -0,3)=42 тис. грн.

а) Інтервал часу від початку договору до звітної дати (1 жовтня) складає 61 день. Коефіцієнт k (1-61/365) =0,833: резерв незаробленої премії дорівнює 42x10/12 =34,981 тис. грн.

б) Інтервал часу від початку договору до звітної дати (1 січня) складає 153 дня. Коефіцієнт k (1 - 153/365) =0,581; резерв незаробленої премії 24.395 тис. грн.

9.2.3. Метод 24-х часток

Аналогічний метод, що дає трохи менш точний результат, оскільки прив'язує початок всіх укладених протягом якого-небудь місяця договорів до середини місяця. Одиниця виміру часу тут — півмісячний інтервал часу, тривалість року приймається 24 таким відрізкам. Приміром, якщо річний договір страхування укладений у першому місяці року, то він вважається укладеним у середині місяця, тобто від початку року пройшла 24-я частка року. Якщо звітна дата — кінець року, то коефіцієнт k 1 -1/24 = 23/24 . Якщо ж договір укладений в останній місяць року, коли термін від початку року до середини цього місяця дорівнює двадцяти трьом 24-м часткам року, k =1-23/24 =1/24.

Приклад. Для даних попереднього прикладу розрахувати РНП методом 24-х часток. Договір страхування вважається укладеним у середині серпня.

а) До звітної дати (1 жовтня) пройшло три 24-х частки року. Коефіцієнт k = 1-3/24 =21/24 ; РНП — 42x21/24 =36,75 тис. грн.

б) До звітної дати (1 січня) пройшло дев'ять 24-х часток року. Коефіцієнт k = 1 - 9/24 = 15/24 : РНП —

42x15/24 тис. грн.

9.2.4. Метод 8-х часток

Аналогічний попереднім, але має на увазі, що договори згруповані по кварталах року і починаються в середині відповідного кварталу.

Цей метод є подальшим спрощенням і припускає, що всі договори починаються в середині року.

9.2.5. РНП для премії, що сплачується на виплат

У випадку, коли страхова премія сплачується в кілька прийомів, резерв незаробленої премії дорівнює різниці між технічною премією, що надійшла до моменту звіту, за договором і заробленою премією:

$$V(t) = P_t(t) - P_t \frac{t}{T}. \tag{222}$$

Приклад. Умови ті ж. що й у попередньому прикладі, з тією тільки різницею, що страхова премія вноситься в два прийоми: перша половина премії — при укладення договору, друга — три місяці по тому.

а) До моменту оцінки резерву внесена половина технічної премії:

$P_1(t) = P_1/2$:

$V_1(t) = P_1/2 - P_1 \text{ x } t/T = 21 - 42 \text{ x } {}^{61}/_{365} = 13{,}981$ тис. грн.

б) До моменту оцінки резерву внесена вся технічна премія:

$P_1(1) = P_1$;

$V_1(l) = P_t[1 - {}^{t}/_{T}) = 42 \text{ x}(1 - {}^{153}/_{365}) = 24{,}395$ тис. грн.

Результати прикладів представлені на рис.21. На верхньому графіку показана динаміка надходження технічної премії: а) при одноразовій сплаті страхової премії;

б) при сплаті першої половини премії на початку терміну, а другий — через три місяці. На середньому графіку представлена наростаючим підсумком залежність розрахункового (нормативного) рівня виплат (включаючи адміністративні витрати) від часу. Оскільки виплати не залежать від способу сплати страхової премії, те крива та сама для обох прикладів. На нижньому графіку, що є різницею між середнім і верхнім графіками, показана динаміка резерву незаробленої премії.

Визначимо зміну РНП за період, що починається в момент t_0 і закінчується в момент t (звітний період):

$$\delta V = V(t) \quad V(t_0) = \left[P_t(t) - P_t(t_0)\right] \quad W(t) \cdot W(t_0), \tag{223}$$

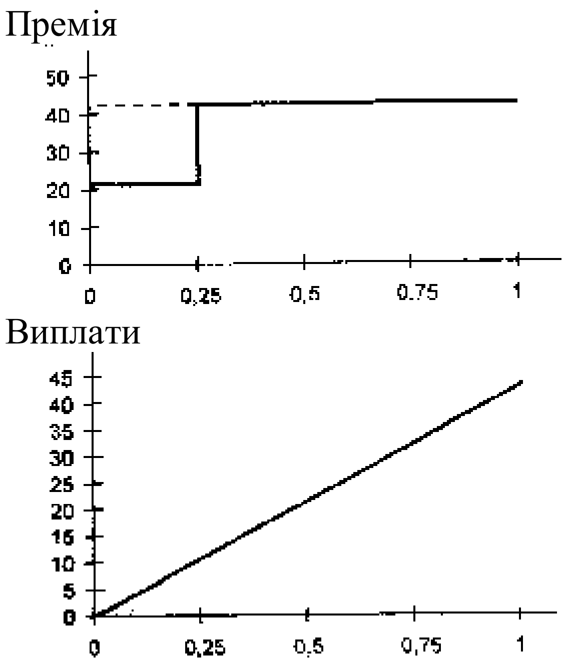
де перший доданок дає технічну премію, що надійшла за цей період, а друге - зароблену за цей час премію, що складається з зароробленої нетто-премії (нормативного рівня виплат) і заробленої адміністративної премії. Якщо договір діє до початку звітного періоду і закінчується пізніше звітної дати t, то зароблена премія

$$W(t) \quad W(t_0) = P_t \frac{t - t_0}{T}; \tag{224}$$

якщо договір діє не весь звітний період, то

$$W(t) - W(t_0) = P_t\frac{\tau}{T} = Pn\frac{\tau}{T} + Pbf_o\frac{\tau}{T},$$ (225)

де τ— час дії договору в звітному періоді.



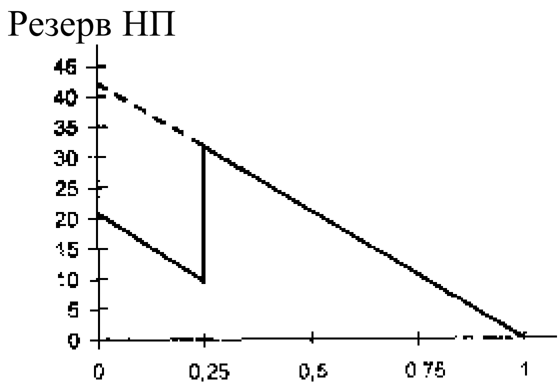


Рис. 21. Премія, нормативні виплати, резерв незаробленої премії одноразова премія (штрихова лінія); перша половина премії вноситься на початку терміну, друга — через 3 місяці (суцільна лінія)

9.2.6. Середній рівень резерву незаробленої премії

Оцінимо середній рівень резерву незаробленої премії протягом терміну дії договору. Середнє значення резерву визначається формулою

$$\bar{V} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[P(t) - P_t\frac{t}{T}\right]dt.$$ (226)

Повертаючи до попередгіх прикладів, одержимо (при T=1)

1) $\bar{V} = \int_0^1 P_t(1-t)\,dt = \frac{P_t}{2} = 21$ тыс.грн.

2) $\bar{V} = \int_0^{1/4}\left(\frac{P_t}{2} - t\right)dt + \int_{1/4}^1 (P_t - t)\,dt = \frac{3P_t}{8} = 15{,}75$ тыс.грн.

Звідси видно, що при сплаті страхової премії в два прийоми середній рівень страхового резерву нижче, ніж при одноразовій сплаті страхової премії. Цей факт є відображенням загального результату: при розстрочці страхової премії на кілька платежів середній рівень страхового резерву знижується, причому тем сильніше, чим більше число платежів. Як ілюстрацію розглянемо приклад, коли страхова премія сплачується в i рівних платежів, внесених у моменти часу kT/n, де k=1,2, ..., n-1. Тоді середній рівень страхового резерву

$$\bar{V} = \frac{1}{T}\left\{\int_0^{T/n} \frac{P_1}{n}\,dt + \int_{T/n}^{2T/n} \frac{2P_1}{n}\,dt + \ldots + \int_{T(1-1/n)}^{T} P_1\,dt - \int_0^T P_1 \frac{t}{T}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\frac{P_1 T}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1) - P_1\frac{T}{2}\right\} = \frac{P_1}{2n}. \tag{227}$$

Результат очевидний: середній рівень страхового резерву назад пропорційний числу платежів страхової премії.

9.3. Резерв коливань збитковості

9.3.1. Нормативний рівень виплат

Резерв коливань збитковості (РКЗ) призначений для згладжування коливань рівня виплат біля нормативного значення протягом тарифного періоду. При цьому по закінченні тарифного періоду та його частина, що сформувалася за рахунок відхилення рівня виплат від середнього значення, повинна виявитися рівної нулю, залишок же буде обумовлений нагромадженням ризикової надбавки за цей термін.

Якщо фактичний рівень страхових виплат за звітний період перевищує нормативний рівень, то перевищення оплачується з РКЗ, накопиченого за сприятливі періоди часу, коли рівень виплат був нижче нормативного. Якщо ж фактичні виплати нижче розрахункового (нормативного) рівня, то надлишок страхової премії поповнює РКЗ на випадок несприятливих майбутніх виплат.

Нормативний рівень виплат за звітний період дорівнює сумарній величині заробленої за цей період премії, що визначається підсумовуванням індивідуальних зароблених нетто-премій по всіх договорах, що діяли:

$$WZ(t) = \sum_q Pn_q \frac{\tau_q}{T_q}, \tag{228}$$

де Pn_q, T_q – страхова нетто-премія і тривалість q-го договору страхування; τ_q – тривалість дії q-го договору страхування в звітному періоді.

Сума відрахувань у резерв коливань збитковості за звітний період

$$Q\bar{Z} = WZ - Z_f = \sum_q Pn_q \frac{\tau_q}{T_q} - Z_f. \tag{229}$$

де Z_f — фактичний рівень виплат.

З'ясуємо, як розподіляється технічна премія, що надійшла в звітному періоді. Складаючи зміну РНП і суму відрахувань у РКР, одержимо

$$P(t) - P(t_0) = Q\bar{Z} + RZ(t) - RZ(t_0) + WZ\frac{f_a}{1-f} + Z_f. \tag{230}$$

Технічна премія, що надійшла в звітному періоді, дорівнює сумі відрахувань у РНП, величині зміни РНП, заробленої за період офісної премії і сумі фактичних виплат.

9.3.2. Розрахунок збитковості по звітним даним

Поряд з визначенням величини відрахувань у резерв коливань збитковості часто виникає задача визначення фактичної збитковості по звітного даної і порівняння її з розрахунковим значенням, використовуваним для розрахунку тарифної нетто-ставки. Для цього виділимо групу договорів з однаковим ризиком, причому терміни дії договорів можуть бути різними. У силу рівномірності розподілу ризику протягом року величину нетто-премії для всіх договорів можна представити у виді

$$Pn_q - TnS_qT_q, \qquad (231)$$

де Tn — річна тарифна нетто-ставка.

Нормативний рівень виплат за звітний період по цій групі договорів можна записати як добуток річної тарифної нетто-ставки на зважену сукупну страхову суму по всім договорах страхування, що діяли в звітному періоді:

$$WZ = Tn\sum S_q\tau_q . \qquad (232)$$

Вага кожної страхової суми визначається часом дії відповідного договору в звітному періоді.

Якщо замість нормативного рівня виплат узяти фактичний рівень виплат у звітному періоді можна визначити фактичну збитковість як

$$y_f = \frac{Z_f}{\sum_q S_q\tau_q} . \qquad (233)$$

Визначення фактичного рівня виплат — непроста задача; Справа в тім, що може пройти якийсь час після збитку, який стався, до того, як повною мірою стануть відомі вимоги, що підлягають оплаті. Важливо, щоб ці вимоги були віднесені до періоду, коли стався страховий випадок. Крім того, може пройти багато років, перш ніж стануть відомі остаточні суми по вимогах виплат. Тому і розраховані значення збитковості слід уточнювати в міру того, як уточнюються суми збитків.

9.4. Оцінка інвестиційного доходу

Доход від інвестування страхових резервів — одне з основних джерел одержання прибутку страховою компанією. Тому оцінка величини цього доходу є необхідною умовою планування фінансової діяльності страховика. Специфічна особливість розрахунку доходу від інвестування в тім, що величина страхового резерву, що служить базою для нарахування відсотків, змінюється в часі внаслідок нерівномірності надходження страхової премії і здійснення страхових виплат.

Оцінимо процентний доход для найпростішої моделі, що вже розглядалася вище, вважаючи, що індивідуальний страховий фонд $V\{t)$ за кожним договором страхування лінійно зменшується від значення технічної премії, що надійшла, на початку договору до нуля при його закінченні відповідно. Якщо термін дії договору дорівнює T, а процентний доход за інтервал часу dt дорівнює $iV(t)dt$, де i — річна процентна ставка, під якою інвестуються страхові резерви, те інвестиційний доход за термін дії договору

$$I = i\int_0^T V(t)\,dt = iT\overline{V}, \tag{234}$$

де V — середній рівень резерву незаробленої премії протягом терміну дії договору.

Зміст формули (234) очевидний: страховик одержує в тимчасове користування на термін T засобЬ, середній розмір яких дорівнює V, і інвестує їх на цей термін під процентну ставку i. одержуючи доход I. Якщо страхова премія сплачується одноразово, то відповідно до формули (234) (при n = 1) одержимо

$$I = iTP_t/2n. \tag{235}$$

Якщо ж страхова премія вноситься на виплат n рівними платежами величиною P_t/n через проміжки часу T/n, то процентний доход

$$I = iTP_t/2. \tag{236}$$

Зміст формули (236) очевидне: чим більше число платежів страхової премії, тим менше процентний доход. При n платежах страховик недоодержує в порівнянні з одноразовою сплатою премії процентний доход у розмірі

$$\Delta I = iTP_t(1-1/n)/2. \tag{237}$$

Страховик, що погоджується на сплату страхової премії на виплат, вправі порушити питання про компенсацію недоотриманої частини процентного доходу. Логічно частина премії, не сплачену при укладення договору, розглядати як кредит страховика страхувальнику, виплачуваний на виплат з відсотками. При цьому відсотки нараховуються з поточної величини заборгованості, тобто із суми несплачених внесків. Так, наприклад, якщо страхова премія сплачується двома рівними платежами, причому другий внесок — через період $T/2$, то протягом цього часу величина заборгованості становить $P_t/2$, відсотки становлять $iTP_t/4$, процентний доход від інвестування страхових резервів складає таку ж величину; у результаті в сумі вийде такий же процентний доход, як при одноразовій сплаті страхової премії. Аналогічно при сплаті страхової премії n рівними платежами через інтервали часу T/n заборгованість за k-й інтервал часу складає $D_k = P_t(1-k/n)$, відсотки — iD_k, сума відсотків за термін дії договору

$$I = iP_t\frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(1-k/n) = \frac{iP_tT}{2}(1-1/n). \tag{238}$$

Додаючи до (238) процентний доход від інвестування страхових резервів, одержимо значення величинЬ інвестиційного доходу від страхових резервів при одноразовій сплаті страхової премії.

У класичному варіанті погашення заборгованості відсотки виплачуються разом з частиною боргу, що погашається, тобто разом з черговими внесками, причому в розмірі, пропорційному величині поточної заборгованості. Для розрахунків зручніше. щоб процентні платежі складали постійну добавку до кожного внеску. Величина цієї добавки дорівнює частці від розподілу (238) на кількість внесків

$$\Delta = I/n = \frac{iP_iT}{2n^2}(n-1), \qquad (239)$$

Література

1. Actuarial mathematics/ N. L. Bowers, H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, Nesbitt. – Itasca, – 1986.– 350 с.
2. Neill F. Life contingencies. – Heinemann Professional Publishing. – 1989.– 189 с.
3. Базилевич В.Д. Страховий ринок України. – К.: Товариство «Знання». – 1998. – 374 с.
4. Бурроу К. Основы страховой статистики. – М.: Анкил. 1992.– 280 с.
5. Воблый К. Г. Основы экономии страхования. – М.: Анкил, 1995. – 250 с.
6. Гвозденко А.А. Основы страхования. – М.: Финансы и статистика. – 1998. – 304 с.
7. Гвозденко А.А. Финансово-экономические методы страхования. – М.: Финансы и статистика. – 1998. – 184 с.
8. Гербер Х. Математика страхования жизни. – М.: Мир. – 1995. – 600 с.
9. Градштейн И. С.. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм. рядов и произведений. – М.: Физматгиз.. – 1962. – 820 с.
10. Дейкин К. Введение в актуарную профессию. – М.: Сов. ит. ас.. – 1994. – 120 с.
11. Карлберг К. Excel 5 для Windows в вопросах и ответах. – СПб.: BHV — Санкт-Петербург. – 1995. – 450 с.
12. Карри И. Прикладная статистика. – М.: Сов. ит. ас. – 1994. – 500 с.
13. Ковалев В. В. Финансовый анализ: управление капиталом, выбор инвестиций, анализ отчетности. – М.: Финансы и статистика, – 1996. – 300 с.
14. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики. – М.: Дело. – 1998. – 304 с.
15. Манес А. Основы страхового дела. – М.: Анкил. – 1992. – 195 с.
16. Миркин Я М. Ценные бумаги и фондовый рынок. – М.: Перспектива, – 1995. – 210 с.
17. Орланюк-Малицкая Л. А. Платежеспособность страховой организации. – М.: Анкил, – 1994. – 220 с.
18. Первозванский А. А., Первозванская Т. Н. Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра-М. – 1994. – 261 с.
19. Фалин Г. И. Математический анализ рисков в страховании. – М.: Российский юридический издательский дом, – 1994. – 300 с.
20. Фалин Г. И., Фалин А. И. Введение в актуарную математику. – М.: Изд-во

Моск. ун-та. – 1994. – 94 с.
21. Финансовый менеджмент: теория и практика: Учебник / Под ред. Е. С. Стояновой. – М.: Перспектива. – 1996. – 520 с.
22. Хелферт Э. Техника финансового анализа. – М.: Аудит: ЮНИТИ. – 1996. – 410 с.
23. Холт Р. Н. Основы финансового менеджмента. – М.: Дело ЛТД. – 1995. – 320 с.
24. Холт Р. Н., Барнес С. Б. Планирование инвестиций. – М.: Дело ЛТД. – 1994. – 550 с.
25. Цисарь И.Ф., Чистов В.П., Лукьянов А.И. Оптимизация финансовых портфелей банков, страховых компаний, пенсионных фондов. – М.: Дело. – 1998. – 128 с.
26. Четыркин Е. М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело ЛТД. – 1995. – 284 с.
27. Шахов В.В. Введение в страхование. – М.: Финансы и статистика. – 1999. – 288 с.
28. Штрауб Э. Актуарная математика имущественного страхования. – М.Финасы и статистика. – 1995. – 330 с.

ДОДАТОК А.
СЛОВНИК СПЕЦІАЛЬНИХ ТЕРМІНІВ.

Абандон (фр. Abandon) - відмовлення страхувальника від своїх прав на застрахований об'єкт (судно, вантаж) на користь страховика при одержанні від нього повної страхової суми.

Авуари (фр. Avoir) - синонім "активи" (кошти, векселі, акредитиви, цінні папери, рахунки в банках і т.п.) - частина страхового балансу.

Адендум (лат. Addere) — письмове доповнення до раніше укладеного договору страхування і перестрахування, у якому містяться погоджені між сторонами зміни до раніше обумовлених умов цих договорів.

Аквизиція — професійна робота страхового агента і страхового брокера по залученню нових договорів страхування фізичних і юридичних осіб у страховий портфель.

Аквізитор (лат. Acquisitor) - страховий чи агент брокер (маклер), що займається залученням (аквизицією) нових страхувальників. див. *Страховий агент, Страховий брокер*

Актив страховика - майно страховика в грошовому вираженні (основні засоби і позаоборотні активи, фінансові вкладення, матеріали, кошти в касі, на розрахунковому рахунку, цінні папери й ін.), частина бухгалтерського балансу.

Актуарієм *(actuarius)* у Древньому Римі називалася офіційно призначена людина, що записував рішення Сенату і щодня вів у ньому запису дебатів. Актуарії традиційно відігравали головну роль у страхуванні життя. Фахівець в області актуарних розрахунків.

Актуарні розрахунки - сукупність економіко-математичних і ймовірносно-статистичних методів розрахунків тарифних ставок. *Актуарні розрахунки* являють собою процес, у ході якого визначаються витрати, необхідні на страхування даного об'єкта. За допомогою Актуарних розрахунків визначаються собівартість і вартість послуги, що робиться страховиком страхувальнику. У більш узагальненій формі Актуарні розрахунки можна представити як систему математичних і статистичних закономірностей, що регламентують взаємини між страховиком і страхувальниками.

Акциз (фр. Accise) - вид непрямого податку на товари масового споживання (чай, горілку, тютюн, машини і т.д.) і послуги.

Акціонерна страхова компанія — форма організації страхового фонду на основі централізації коштів шляхом продажу акцій. Найбільш розповсюджений тип страховика в ринковій економіці. Розрізняють А.с.к. відкритого і закритого типу. а також по напрямках діяльності — прямі страховики і перестрахувальники (перестрахувальні компанії), у тому числі спеціалізовані й універсальні.

Акціонерне страхове товариство (АСО) (Joint Stock Company) - основна організаційна форма проведення страхування в капіталістичних країнах. Основним капіталом Товариства є акціонерний капітал, формований за рахунок випуску (емісії) і реалізації акцій. Існують два види АСО: закриті і відкриті (публічні). **У закритих АСО** акції поширюються тільки між акціонерами і можуть бути іменними. Вони не служать об'єктом купівлі-продажу, але можуть переуступатися іншим особам з дозволу членів АСО. **У відкритих АСО** акції можуть вільно продаватися, купуватися, котируватися на біржі (котирування акцій - ціна. по який вона може бути продана на чи біржі ринку цінних паперів).

Акція (фр. Action) - цінний папір, що випускається акціонерним товариством і дає право її власнику на одержання визначеного доходу (дивіденду) від прибутку акціонерного товариства.

Алімент — переданий перестрахувальний інтерес.

Андеррайтер (Underwriter) - особа, уповноважена страховою чи компанією синдикатом приймати на страхування ризики.

Аннуітет (ньому. Annuitat) - договір, по якому страхувальник чи відразу вроздріб платить страховику страхові внески, а потім страховик протягом визначеного терміну виплачує страхувальнику деяку гарантовану суму (ренту).

Аутсайдери (Outsiders) - страхові компанії, брокерські фірми і т.п. Аутсайдери не є членами відповідних страхових союзів, асоціацій і не випливають у своїй діяльності можливим тарифним угодам, виступаючи як конкуруючу сторону.

Бонус (лат. Bonus)— знижка із суми страхової премії в абсолютних величинах, чи відсотках промиллях, що надає страховик за оформлення договору страхування на особливо вигідних для нього умовах. Величина Б. відбивається в страховому полісі. В американській страховій практиці Б. називається рабат.

Бордеро (фр. Bordereau) — перелік прийнятих на страхування і підметів перестрахуванню ризиків. Б. видається цедентом перестрахувальникові в терміни, зазначені в договорі перестрахування.

Брокер (Broker) - чи компанія окреме особа, що виступає посередником між страхувальником і страховиком. По своєму статусі є представником страхувальника і повинний підшукати йому страховика, що забезпечує гарантоване відшкодування збитку при настанні страхового випадку. Комісійна винагорода брокер одержує від страховика і несе перед ним відповідальність за сплату внесків. Інститут брокерів особливо розвитий у Великобританії.

Брутто-премія (Gross premium) - сума страхових внесків (платежів, премій), обчислена по брутто-ставці.

Брутто-ставка (Gross rate) - повна тарифна ставка страхового внеску, що представляє суму нетто-ставки, що забезпечує виплати при страхових випадках, навантаження і надбавки до нетто-ставки, що призначається для покриття непередбачених витрат, витрат на проведення попереджувальних заходів, на ведення справи і формування планового прибутку. див. *Тарифна ставка*

Витрати аквизиційні — виробничі витрати страхового Товариства, зв'язані з залученням нових страхувальників і висновком нових страхових договорів за посередництвом страхових агентів.

Витрати інкасаційні — витрати, зв'язані з обслуговуванням наличноденежного обороту надходження страхових платежів. Це витрати на виготовлення бланків квитанцій про прийом страхових платежів і облікових регістрів (книг, відомостей, довідок і т.п.).

Витрати ліквідаційні — витрати по ліквідації збитку, заподіяного страховим випадком. До них відносяться витрати на оплату праці ліквідаторам (особам, що займаються ліквідацією збитку), понятим, судові витрати, поштово-телеграфні витрати і витрати по виплаті страхового відшкодування.

Витрати організаційні зв'язані з установою страхового Товариства. Вони відносяться до активів страховика, тому що є інвестиціями.

Витрати управлінські можуть бути підрозділені на загальні витрати керування і витрати по керуванню майном. Управлінські витрати непропорційні зібраним страховим платежам. Велика частина їх залежить від рівня зайнятості в даному страховому суспільстві. При оцінці рентабельності окремих видів страхування основне значення має сума управлінських витрат.

Відповідальність цивільна - передбачений законодавством вид відповідальності громадян і організацій перед третіми особами (фізичними і юридичними), яким може бути заподіяний збиток унаслідок якої-небудь чи дії бездіяльності того, хто заподіяли шкоду.

Внесок постійний (фіксований) — страхові внески, що з часом не змінюються, а залишаються постійними.

Внесок поточний — являє собою частина від загальних зобов'язань страхувальника стосовно страховика, тобто є частиною одноразової премії. Сума поточних внесків по даному виді страхування буде завжди більше одноразового внеску. Це порозумівається втратами прибутку страховика при розстрочених поточних внесках.

Внесок річний (премія). Одноразовий страховий внесок звичайно вноситься по договорах, що має річний термін дії. У цьому випадку можна говорити про річний страховий внесок (премії), сума якого обумовлена договором, що укладається. Річний внесок неподільний і по теорії Актуарних розрахунків завжди більше одноразового внеску. В особистому страхуванні виділяють термінові і довічні річні страхові премії. Терміновими називаються ті страхові внески, що сплачуються протягом визначеного проміжку часу. Довічні страхові внески сплачуються щорічно, поки живий страхувальник.

Внесок розстрочений страховий Одноразові страхові внески підрозділяються на річні з урахуванням економічних можливостей страхувальника зробити їхню сплату. У свою чергу річний внесок може бути розділений на рівні частини (щомісячний, квартальний, піврічний).

Гранична система страхового забезпечення — відшкодуванню підлягають тільки відносно великі збитки, що виходять за межі припустимих. На практиці зустрічається вкрай рідко.

Делікт — правопорушення, що служить підставою для позову по збитках при відсутності контракту.

Депозит (Deposit) - грошова сума, внесена на спеціальний рахунок у банку з метою одержання прибутку.

Диверсифікованість (лат. Diversus) — розширення активності великих страхових суспільств за рамки основного бізнесу. Д. — найважливіша складова частина структури страхового ринку. Чим більше напрямків діяльності в страховика, тим вище рівень Д. Виділяють відносну Д. і безвідносну Д., тобто не зв'язану з основною діяльністю страхового Товариства.

Дивіденд (Dividend) — частина прибутку акціонерній страховій компанії, що підлягає розподілу за результатами діяльності страховика за рік між власниками акцій відповідно до їхньої кількості і вартості.

Договір перестрахування – юридична угода (двостороння угода) між цедентом і перестрахувальником, при якому одна сторона — цедент — зобов'язується передавати, а інша сторона — перестрахувальник — приймати ризики в перестрахування на визначених умовах.

Договір страхування — угода (юридична угода) між страхувальником і страховиком (часто укладене за посередництвом страхового чи агента страхового брокера), що регулює їхні взаємні зобов'язання відповідно до умов даного виду страхування. У посвідчення ув'язненого Д. с. страховик видає страхувальнику *страховий поліс*.

Еквівалентність страхових відносин - гарантоване забезпечення страхових виплат страхувальникам за рахунок одержуваних від них страхових внесків. Економічні показники страхової діяльності: - середня страхова сума (загальна страхова сума, ділена на число застрахованих об'єктів); - середній платіж на один договір (сума, що надійшли внесків, ділена на число договорів); - рівень виплати страхових сум і відшкодувань (процентне співвідношення між виплаченою сумою і сумою страхових внесків, що надійшли,);

Екстраполяція (Extrapolation) - метод розрахунку перестрахувальної премії по договорах ексцеденту збитку.

Ексцедент (Surplus) - сума ризику, що підлягає перестрахуванню понад суму власного утримання страховою компанією.

Ексцедент збитковості (Excess Loss Ratio Treaty or Stop of Loss Treaty) - це договір перестрахування, по якому перестрахувальник захищає по визначеному виді страхування загальні результати проходження справи на випадок, якщо збитковість перевищить обумовлений у договорі відсоток.

Ефективність страхових операцій - комплексне поняття, що включає систему показників, що характеризують економічну доцільність проведення страхування серед різних галузей страхування (особистого, майнового страхування і страхування відповідальності).

Збитковість страхової суми — економічний показник діяльності страховика, що характеризує співвідношення між виплатами страхового відшкодування і страховою сумою.

Збиток — 1) підлягаючий відшкодуванню страховиком збиток, заподіяний об'єкту страхування в результаті страхового випадку; 2) установлений факт настання страхового випадку (реалізація страхового ризику); 3) документи і матеріали в архіві страховика, що характеризують істотні обставини і факти по страховому випадку, виділені в самостійне діловодство і підтверджуючі обґрунтованість виплати. Див. *Ліквідація збитків*.

Збиток — утрати страхувальника в грошовій формі в результаті реалізації страхового ризику. Причини З. можуть бути результатом стихійних лих, судових витрат і арбітражних зборів, списання безнадійних боргів, псування і нестачі товарно-матеріальних цінностей і готової продукції й інших причин. Заявлені страхувальником претензії по У. приймаються страховиком, якщо виникли в результаті страхового випадку. Див. *Ліквідація збитків*.

Збиток страхової: 1) підлягаючий відшкодуванню страховиком збиток, заподіяний об'єкту страхування при настанні страхового випадку; 2) установлений факт настання страхового випадку (реалізація страхового ризику).

Зворотність - повернення страхових внесків (платежів, премій) при достроковому припиненні дії договору.

Інвестиція (ньому. Invesrition, лат. Investire) - вкладення засобів страховика в невиробничу сферу з метою одержання прибутку. Видами інвестицій страховика є кошти, вкладені в банки (депозити), рухоме майно, авторські права, ноухау й ін. У складі інвестицій виділяються фінансові інвестиції, капітальні вкладення, запаси товарно-матеріальних цінностей. Одна з форм диверсифікованості коштів у різні сфери виробництва, науки і техніки, суміжний бізнес (міжнародний і вітчизняний туризм) з метою одержання додаткового прибутку.

Індосамент — передатний напис на страховому полісі. Розрізняють іменні И., по яких права передаються конкретній особі, і бланкові І., видавані на пред'явника страхового поліса.

Індосант — особа, що робить передатний напис на. страховому полісі. Див. *Індосамент*.

Іпотека (гречок. Hipotheke) - вкладення засобів під нерухомість (будівництво будинків, відбудовні роботи після землетрусу і т.п.).

Карго (Cargo) - страхування чи вантажів майна, перевезених морським судном з метою одержання фрахту.

Каско (Hull Insurance) - страхування засобів транспорту (судів, літаків, автомобілів). Не містить у собі страхування пасажирів, перевезеного майна, відповідальності перед третіми особами і т.д.

Квота в страхуванні (Quota in Insurance) - частка участі страховика в страхуванні (перестрахувальника в перестрахуванні).

Килим перестрахувальний - форма угоди, застосовувана як проміжна форма між перестрахувальними договорами.

Ковернот — документ, видаваний страховим брокером страхувальнику в підтвердження того, що договір страхування з його доручення укладений. У К. вказуються умови страхування і тарифна ставка. Страховик не несе юридичної відповідальності по К., виданому страховим брокером. К. підлягає заміні на страховий поліс.

Комерційна таємниця (конфіденційність) — зведення про діяльність страховика, поширення яких завдає шкоди його інтересам. Будь-яка конфіденційна управлінська, комерційна і статистична інформація, що представляє цінність для страхового Товариства в досягненні переваг над конкурентами на страховому ринку.

Комісія страхова (комісійна винагорода) – винагорода, що сплачується страховиком посередникам (агентам, брокерам, маклерам) за залучення клієнтів на страхування й оформлення страхової документації.

Конкуренція — економічне суперництво відособлених страховиків за частку страхового ринку, висновок конкретного особливо вигідного договору чи страхування договору перестрахування. К. служить формою економічного зв'язку між страхувальником і страховиком. Наявність К. страховиків забезпечує можливість вибору договору страхування для страхувальника, а можливість вибору — підсилює дія К.

Контралимент — отриманий перестрахувальний інтерес.

Котирування (Quotation) - ставка премії (внеску), по якій страховик готовий прийняти на страхування відповідний ризик.

Кумуляція (лат. Cumulatio) — сукупність страхових ризиків, при яких велика кількість об'єктів страхування зі значними страховими сумами може бути порушено тим самим страховим випадком (наприклад, землетрусом), що заподіює катастрофічний збиток. Зосередження ризиків у межах визначеного простору.

Кептивні компанії (Captive company) - страхові компанії, засновувані індустріальними, комерційними чи акціонерними компаніями з метою страхування усіх чи частини приналежних їм ризиків.

Лізинг фінансовий - напрямок засобів на підтримку підприємців.

Ліквідація збитків — комплекс заходів страховика по встановленню причин, фактів і обставин (підтверджених незаперечними доказами) страхового випадку і виплаті страхового відшкодування.

Ліквідність - здатність страховика задовольняти претензії, пропоновані страхувальниками. зобов'язання страховика

Ліміт відповідальності страховика (Limitation of Insurers Liability) — страхова сума (страхове покриття), зафіксована в чи договорі страховому полісі, що береться забезпечити (виплатити) страховик при настанні страхового випадку. Ліміт відповідальності може бути встановлений по окремому виді чи страхування по окремій страховій події.

Ліміт страхування - максимальна грошова сума, на яку можна застрахувати матеріальні цінності і страхову відповідальність.

Ліцензування страхових операцій - видача страховим організаціям ліцензії (дозволу) на право проведення тих чи інших видів страхування.

Ллойд (Lloyd's) - корпорація приватних страховиків, іменованих у практиці "Ллойда" андеррайтерами, кожний з який приймає страхування на свій ризик.

Майнове страхування — див. *Об'єкт страхування*.

Маклер страхової (ньому. Makler) - посередник, те ж, що і брокер страхової. Найбільш характерна фігура для німецького й австрійського страхових ринків.

Максимально можливий збиток — оцінний максимальний розмір збитку, що може бути заподіяний об'єкту страхування в результаті страхового випадку.

Менеджер - це організатор бізнесу, що володіє навичками ефективного керування підприємством, фірмою, туристською і страховою організацією в умовах ринкової економіки.

Надбавка ризикова (дельта-надбавка) - один з методів забезпечення фінансової стійкості результатів страхових операцій шляхом включення в страховий тариф (у нетто-ставку) відповідних засобів для покриття надзвичайних збитків (смерть туриста, аварія літака, загибель теплохода й ін.).

Нездоланна сила — надзвичайна подія, що неможливо була передбачати і запобігти. У практиці страхування іменуються форс-мажорними обставинами і можуть включатися в договір страхування.

Непропорційне перестрахування — форма організації договорів перестрахування типу "стоплос збитковість". Означає, що перестрахувальник приймає зобов'язання вирівняти цеденту перевищення збитковості понад установлений ліміт, що складає, наприклад, 105% від страхових платежів, зібраних страховиком.

Нетто-ставка (Net-rate) - основна частина страхового тарифу (брутто-ставки), призначена для формування фонду, використовуваного для страхових виплат. див. *Тарифна ставка.*

Ноу-хау — вид інвестиції страхового Товариства: управлінські, комерційні й організаційні рішення, необхідні для ефективної роботи страхового Товариства. Часто складають комерційну таємницю.

Об'єкти страхування — життя, здоров'я, працездатність громадян — в особистому страхуванні; будинку, спорудження, транспортні засоби, фрахт колекції, домашнє майно, перевезені вантажі й інші матеріальні цінності — у майновому страхуванні; цивільна відповідальність страхувальника за матеріальний збиток, заподіяний третім особам (наприклад, при експлуатації засобів підвищеної небезпеки), — у страхуванні цивільної відповідальності.

Облігаторне перестрахування — обов'язкова форма перестрахування, при якій усі страховики, що діють у даній країні, зобов'язані за законом передавати в запропонованій частці визначеному цессионарію (звичайно державному перестрахувальникові) усі прийняті на страхування ризики.

Обов'язкове страхування - одна з форм страхування, при якій страхові відносини між страховиком і страхувальником виникають у силу закону. На відміну від добровільного страхування обов'язкове страхування не вимагає попередньої згоди (укладення договору) між страховиком і страхувальником.

Обсяг страхової відповідальності — перелік конкретних подій (наприклад, крадіжка, пожежа, землетрус і т.д.), передбачених чи законом договором страхування, при настанні яких страховик робить виплату страхувальнику за рахунок засобів страхового фонду.

Одержувач страхової суми - особа, якому відповідно до договору виплачується обговорена чи сума її частина. Як одержувача страхової суми можуть бути або страхувальник, що уклав договір, або застрахований, чиї життя і здоров'я є об'єктами страхового захисту, або той, що одержує вигоду, призначений страхувальником на випадок своєї чи смерті загибелі.

Особисте страхування — див. *Об'єкт страхування.*

Офшорна страхова компанія - іноземна юридична особа, що займається вивозом (експортом) капіталу за кордон.

Пенальті (Penalty) - один з видів санкцій, застосовуваних при невиконанні договірних зобов'язань.

Перестрахувальна цесія - передача ризику іншій юридичній особі, наприклад страховому Товариству. див. *Цесія.*

Перестрахувальник - первинний страховик, що передає весь чи частину ризику на перестрахування. див. *Цедент.*

Перестрахувальник - страховик, що приймає ризики в перестрахування. див. *Цессионарий (Цессионер).*

Перестрахування — система економічних відносин вторинного страхування, при якій страховик (цедент) передає частину своєї відповідальності по об'єкті страхування іншому страховику (цесіонарію чи цессіонеру) з метою створення збалансованого страхового портфеля. Виступає як страхування одним страховиком (цедентом) на визначених договором умовах ризику виконання усіх чи частини своїх зобов'язань перед страхувальником в іншого страховика (перестрахувальника).

Першого ризику система забезпечення — передбачає виплату страхового відшкодування в розмірі збитку, але в межах страхової суми. При П.р.с.з. весь збиток у межах страхової суми (перший ризик) компенсується

Платежі перехідні. Страхові угоди відбуваються наприкінці календарного року.

Платежу авансові – платежі, що сплачує страхувальник страховику заздалегідь — до настання терміну їхньої сплати, зазначеного в укладеному договорі. Авансові платежі звичайно вносяться за весь термін дії договору. По економічній природі авансові платежі дорівнюють одноразовому внеску.

Полівласник - страхувальник. цілком, а збиток понад страхову суму (другий ризик) узагалі не відшкодовується. див. *Страхувальник.*

Поліс (Policy) - юридичне підтвердження договору страхування.

Портфель страховий - сукупність страхових внесків (платежів, премій), прийнятих даною страховою компанією, чи число укладених і оплачених договорів.

Правила (умови) страхування - один з основних нормативних документів, що визначають умови добровільного страхування.

Право на регрес - право страховика на одержання в порядку зворотної вимоги (регресу) з особа, винного в заподіянні збитку, сум, виплачених чи страхувальнику застрахованому.

Премія ефективна являє собою суму результативної премії і перехідних платежів, резервованих у поточному році і перехідних на наступний рік. Ефективна премія — це вся сума наявних страхових платежів, якими розташовує страховик у даному поточному році. За рахунок ефективної премії виробляється значна частина виплат страхових сум і відшкодування. Якщо довгостроковий договір страхування відбувся і виплат за період більш року його дії не відбулася, то відбувається вирівнювання між ефективною і результативною преміями. Вони взаємно компенсують один одного.

Премія конкурентна — це така премія, що дозволяє страховику в умовах ринку залучити максимально можливе число потенційних страхувальників. Зменшення страхової премії з метою залучення широкого кола страхувальників може привести до фінансових утруднень у страховика.

Премія натуральна — премія, що призначена для покриття ризику за визначений проміжок часу.

Премія необхідна позначає величину страхового внеску, що буде достатнім і дозволить страховику зробити виплати страхових сум і відшкодування. Величина необхідних засобів, що потрібно мобілізувати страховику, обумовлена величиною ризику і закономірностями його прояву протягом визначеного проміжку часу (наприклад, рік).

Премія перестрахувальна — премія, що страховик передає перестрахувальникові за умовами ув'язненого між ними договору перестрахування. Може бути пропорційної і непропорційний стосовно прийнятого перестрахувальником відповідальності в силу укладеного договору. По величині страхової премії розрізняють необхідну, справедливу і конкурентну премію.

Премія попередня. Страховик може надати право страхувальнику внести чи цілком частково належний до сплати внесок до настання терміну сплати. Попередньо внесені платежі розглядаються як внески ощадного характеру, що надійшли на рахунок страхового Товариства. На внесені попередньо суми нараховується відповідний відсоток по вкладах. При настанні страхового випадку до закінчення терміну договору чи страхувальник його спадкоємці одержують не тільки страхову суму, але і страхові внески, по яких не наступив термін сплати. У цьому різниця між авансовими платежами і попередньою премією.

Премія результативна являє собою різницю між річною нетто-премією і перехідними платежами поточного року, віднесеними на наступний рік. Величина результативної премії за інших рівних умов залежить від періодичності сплати страхових платежів (щомісяця, щокварталу, один раз у чи півріччя рік). Чим менше часовий період розстроченого внеску, тим менше величина результативної премії.

Премія середня – виходять у тому випадку, коли страховик абстрагується від індивідуальних особливостей об'єктів страхування і прибігає до середній арифметичній для всієї сукупності.

Премія справедлива відбиває принцип справедливої гри і теорії імовірностей. Справедлива премія відбиває також еквівалентність зобов'язань сторін, що брали участь у договорі страхування.

Премія статечна. Якщо при визначенні страхового внеску в увагу приймається величина ризику об'єкта, що включений у страхову сукупність, то такий страховий внесок називається статечною страховою премією.

Премія Цильмеровська (резервна) — сума нетто-премії і витрат по укладення договорів страхування даного виду за рік. Визначається за допомогою математичних розрахунків. Містить визначені резерви, за рахунок яких відшкодовуються витрати по укладення договорів страхування. У цьому зв'язку аквізаційні витрати являють собою активи страхового Товариства.

Прецедент (Precedent) - чи випадок подія, що мала місце в минулому і служило підставі для аналогічних дій у сьогоденні.

Прибутковість - перевищення доходів над витратами (витратами).

Прибутковість страховика по страхових операціях - відношення річної суми прибутку до річної суми платежів (страхових внесків, премій).

Прибутковість страхової організації - це перевищення доходів над витратами (витратами, включеними в собівартість страхового продукту).

Прибуток від економії управлінських витрат - сукупний прибуток від зменшення витрат на ведення справи (управлінські, інкасові).

Прибуток від зниження фінансової збитковості - елемент прибутку страховика за рахунок зниження фактичної збитковості страхової суми проти передбаченої в тарифі.

Прибуток від інвестицій - прибуток страхового Товариства від участі в діяльності не страхового характеру (крім безпосередньої виробничої, торговопосередницької і банківський).

Прибуток страховий - різниця між ціною на страхову послугу (тарифом) і собівартістю її надання.

Прибуток у тарифах - елемент тарифної ставки (брутто-ставки). Закладається в навантаження і призначена для забезпечення функціонування і розвитку страхової організації. Прибуток у тарифах варто відрізняти від фактичного прибутку, одержуваної від страхових операцій.

Принципал (лат. Principalis) - страховик, від імені якого діє агент, представник.

Пропорційна (часткова) система страхового забезпечення — передбачає виплату страхового відшкодування в розмірі такої частини збитку, яку страхова сума складає стосовно оцінки об'єкта страхування. Наприклад, якщо страхова сума дорівнює 80% оцінки об'єкта страхування, те і страхове відшкодування буде дорівнює 80% збитку. При цьому частина збитку залишається на ризику страхувальника: ступінь повноти відшкодування тим вище, чим менше різниця між страховою сумою й оцінкою об'єкта страхування.

Пропорційне перестрахування — форма організації договорів перестрахування. Містить у собі квотні, ексцедентні і квотно-ексцедентні договори.

Пул (Pool) - загальний казан, куди направляються всі підлягаючі перестрахуванню ризики понад суми власного утримання по всьому страховому чи портфелі по окремих видах страхування

Рабат — див. *Бонус*.

Регрес (Recovery) - право страховика на пред'явлення до сторони, винної в настанні страхового випадку, претензій з метою одержання відшкодування за заподіяний збиток.

Реєстрація ризику — процес спостереження й обліку прояву ризику по видах, формам і т.д.

Резерви страхові - фонди, утворені страховими організаціями, для забезпечення гарантій виплат страхових сум і страхових відшкодувань (фонд резервний, фонд страховий, резерви по страхуванню життя, пенсій, запасні фонди, фонди майбутніх платежів і ін.).

Рейсовий чартер (Voyage charter party) - договір щодо фрахтування судна на рейс.

Реквізити (Essential elements) - встановлені в силу закону вимоги до заповнення відповідних документів.

Рекламація (Compliant Clain) - претензія однієї зі сторін договору до свого контрагента про невиконання ним узятих на себе зобов'язань.

Рента (ньому. Rente) - регулярно одержуваний доход з капіталу, землі, облігацій, страхування і т.п., що не вимагає від одержувача підприємницької і трудової діяльності.

Рентабельність страхових операцій - рівень підвищення доходів над витратами. Звичайно розраховується на основі відносини показника балансового прибутку до доходу за визначений період (як правило, за рік).

Ретроцедент (Retrocedent) — чи страховик перестрахувальник, що передає прийняті в перестрахування ризики в рероцесію (вторинне перестрахування).

Ретроцесіонарій — перестрахувальник, що приймає ризик від ретроцедента.

Ретроцессия — процес подальшої передачі раніше прийнятих у перестрахування ризиків.

Ризик - це конкретне явище чи сукупність явищ (страхова чи подія сукупність подій), потенційна можливість заподіяння збитку об'єкту страхування. див. *Страховий ризик*.

Ризик страховий - випадкова подія чи сукупність подій, на випадок настання яких проводиться страхування (особисте, майнове, страхування відповідальності).

Ризики екологічні зв'язані з забрудненням навколишнього середовища, а транспортні - мають на увазі страхування засобів повітряного, наземного, залізничного і водяного транспорту.

Ризики індивідуальні виражаються в ігноруванні страхування індивідуального домашнього майна, картин, колекцій і т.п.

Ризики катастрофічні – ризики, що можуть при їхньому настанні принести значний збиток страхувальнику й в особливо великих розмірах (аварія на ЧАЕС, землетрус на Південному Сахаліну й ін.).

Ризики об'єктивні не залежать від свідомості і волі страхувальника (стихійні лиха, землетруси, повені і т.п.).

Ризики політичні, чи репресивні ризики, зв'язані з протиправними діями з погляду норм міжнародного права, чи заходами акціями урядів іноземних держав у відношенні іншої чи держави громадян суверенної держави.

Ризики суб'єктивні засновані на чи запереченні ігноруванні об'єктивного підходу до дійсності.

Ризики технічні страховика в теоретичному плані представляє ризик, зв'язаний зі здійсненням страхування. Наявність технічного ризику страховика спонукує його активно брати участь в організації попереджувальних заходів з метою зниження ступеня імовірності настання страхового випадку.

Ризики універсальні - це ризики, що включається в обсяг відповідальності страховика по більшості договорів. Наприклад, страхування туристів від нещасливих випадків і хвороб, крадіжки майна і т.п.

Ринок страховий - система економічних відносин по купівлі-продажу страхових послуг.

Самострахування - створення юридичними чи фізичними особами власного матеріального чи грошового резерву.

Санкції (Penalties) - умови комерційних справ, згідно яким одна зі сторін має право зажадати від іншої сторони відповідного відшкодування у випадку невиконання угоди.

Синя карта (Blue card) - угода між страховими компаніями про взаємне визнання договорів страхування цивільної відповідальності власників автотранспорту.

СІФ (GIF) - вартість товару, страхування, фрахту.

Сліп (Slip) - висилається перестрахувальником потенційним перестрахувальникам документ, пропозиція на перестрахування.

Співстрахування - участь двох чи більш страховиків у висновку того самого договору страхування.

Страхова вартість - це дійсна (фактична) вартість об'єкта страхування (є ще ринкова вартість, договірна вартість і т.д.).

Страхова виплата - виплата страхової суми (частини її) чи страхувальнику застрахованому (при особистому страхуванні) чи страхове відшкодування (при майновому страхуванні) при настанні страхового випадку.

Страхова подія - це потенційний, гіпотетичний (можливий) страховий випадок, на предмет якого проводиться страхування (наприклад, страхові події: нещасливий випадок, хвороба, дожиття до визначеного віку і т.п.).

Страхова сума - визначена договором чи страхування встановлена законом грошова сума, виходячи з який установлюються розміри страхового внеску і страхової виплати, тобто це обсяг страхової відповідальності, прийнятої на себе страховиком. У міжнародній практиці страхова сума називається страховим покриттям.

Страхове відшкодування - сума виплати в покриття збитку при майновому страхуванні і страхуванні цивільної відповідальності страхувальника за матеріальний збиток перед третіми особами. Страхове відшкодування може бути дорівнює чи менше страхової суми, виходячи з конкретних обставин страхового випадку й умов договору страхування (наприклад, наявність франшизи).

Страхове поле — максимальна кількість об'єктів (наприклад, автомобілів), що може бути охоплено страхуванням. Виражається у відсотку охоплення. Максимальне охоплення С.п. досягає 100%. В даний час С.п. відноситься до числа застарілих понять. Більш широко використовується термін "ємність страхового ринку", адекватний за змістом С. п.

Страхове Товариство - страховики, акціонерні компанії, Товариства взаємного страхування й ін.

Страховий агент — аквізитор: фізична чи юридична особа, що діє від імені страховика і з його доручення відповідно до наданих повноважень. С.а. укладає договори страхування, інкасує страхові внески, веде організаційно-масову роботу серед клієнтів. Права й обов'язки С.а. визначаються договором (трудовим контрактом) зі страховиком.

Страховий брокер — аквізитор: фізична чи юридична особа, зареєстрована у встановленому порядку як підприємця, що здійснює посередницьку діяльність по страхуванню від свого імені на підставі доручень чи страхувальника страховика.

Страховий випадок - це вчинилася страхова подія, з настанням якого виникає обов'язок страховика зробити виплату страхувальнику, застрахованій особі, тому, хто одержує вигоду, чи третій особі. При страховому випадку з особистістю чи страхувальника третього особа страхова виплата виробляється у виді страхового забезпечення, при страховому випадку з майном - у виді страхового відшкодування. Страхове забезпечення виплачується страхувальнику чи третій особі незалежно від сум, що приєднуються їм по інших договорах страхування, а також по соціальному страхуванню, соціальному забезпеченню й у порядку відшкодування шкоди (збитку). Страхове відшкодування не може перевищувати розмір збитку, заподіяного застрахованому майну, якщо договором не передбачена виплата страхового відшкодування у визначеній сумі. Якщо страхувальник уклав договори страхування майна з декількома страховиками на суму, що перевищує страхову вартість майна, то страхове відшкодування, одержуване від усіх страховиків, не може перевищувати його страхову вартість. **При** цьому кожний зі страховиків виплачує страхове відшкодування в розмірі, пропорційному відношенню страхової суми за укладеним договором до загальної суми по всім укладеним цим страхувальником договорам.

Страховий внесок — плата за страхування, що страхувальник зобов'язаний внести відповідно до договору чи страхування законом. С. у також називається *страховим* чи платежем *страховою премією*. Інакше кажучи, це плата за страхову послугу.

Страховий інтерес - міра матеріальної зацікавленості в страхуванні. Виражається в страховій сумі й умовах страхового поліса.

Страховий нагляд - контроль за діяльністю страховиків уповноваженим на те державним органом.

Страховий поліс — грошовий документ установленого зразка, видаваний страховиком страхувальнику в посвідчення укладеного договору страхування й утримуючий його умови. Розрізняють стандартні й індивідуальні С.п. Стандартні С.п. виписуються страховиком по широкому колу типових страхових ризиків, що носять масовий характер. Індивідуальні С.п. (наприклад, страхування зовнішніх даних кінозірок) відбивають особистісні страхові інтереси, звичайно зв'язані з професійною кар'єрою. В усіх С.п. можуть бути передбачені особливі умови договору, що задовольняють специфічні страхові інтереси і зв'язані з цим дії (наприклад, заповідальне розпорядження страхувальника). Включення особливих умов договору до складу С.п. звичайно супроводжується застосуванням надбавки до страхової премії, що виражається абсолютними чи відносними величинами.

Страховий портфель — 1) фактична кількість застрахованих чи об'єктів число договорів страхування, документально підтверджених у справах страховика; 2) сукупність страхових ризиків, прийнятих страховиком за визначений період (звичайно один рік).

Страховий посередник — див. *Страховий агент, Страховий брокер.*

Страховий ризик — 1) імовірність настання страхової події. Виражає обсяг можливої відповідальності страховика по тім чи іншому виді страхування. Визначається на основі даних статистики, емпірично і на основі теорії ймовірностей. Вірогідність С.р. перевіряється за допомогою побудови різних економіко-математичних моделей (Актуарні розрахунки). Має важливе значення для визначення розміру страхового фонду; 2) страховий випадок.

Страховий ринок — система економічних відносин із приводу страхування. Економічне середовище функціонування страховиків. Необхідні умови ефективного функціонування С.р. — інформація й організаційні рамки. Страховик повинний знати усі про наявні страхові інтереси, а страхувальник — про наявні можливості укласти той чи інший договір страхування. Це форма зв'язку між учасниками страхових правовідносин. У вузькому змісті С.р. — сукупність страхових суспільств. Діяльність С.р. регулюється державним страховим наглядом.

Страховий тариф, чи брутто-ставка, являє собою ставку страхового внеску з одиниці страхової чи суми об'єкта страхування. Страховий тариф може виражатися в абсолютних чи одиницях відсотках. Страхові тарифи по обов'язкових видах страхування встановлюються в законах про обов'язкове страхування (медичне страхування, страхування військовослужбовців і ін.). Страхові тарифи по добровільних видах страхування (особистого, майна і відповідальності) можуть розраховуватися страховиками самостійно (на основі Актуарних розрахунків). Розмір страхового тарифу визначається в договорі страхування за згодою Сторін.

Страховий фонд — елемент суспільного відтворення, резерв матеріальних чи коштів, формований за рахунок внесків страхувальників і, що знаходиться в оперативно-організаційному керуванні в страховика. Обумовлений страховими інтересами. Частина засобів С.ф. повинна постійно знаходитися в ліквідній формі: у виді депозитів у банках, акцій, що котируються на біржі, державних казначейських зобов'язань і т.д.

Страховик — юридична особа, спеціально створене для здійснення страхової діяльності і, що одержало у встановленому порядку державну ліцензію на здійснення страхової діяльності на території України. За формою організації С. виступають акціонерна страхова компанія, Товариство взаємного страхування, страхова корпорація й ін. До числа С. відносяться державні страхові організації. В економіці ринкового типу акціонерні страхові компанії, у тому числі за участю держави, є основними С.

Страхувальники -- юридичні і фізичні особи, що уклали договір страхування, або є страхувальниками в силу закону (при обов'язковій формі страхування) і страхові внески, що сплачують, (за договором чи за законом). Страхувальники вправі укладати зі страховиками договори про страхування інших осіб (застрахованих) чи на користь третіх осіб і призначати дотримувачів вигоди для одержання страхових виплат, а також заміняти їх за своїм розсудом до настання страхового випадку.

Страхування (процес) - угода між страховиком і страхувальником на основі чи договору закону про захист майнових інтересів чи страхувальника застрахованого.

Страхування (сутність) - замкнута розкладка можливого збитку між зацікавленими фізичними і юридичними особами.

Субротація — перехід до страховика, що виплатив страхове відшкодування, права пред'явлення претензій, що страхувальник має до того, хто спричинив шкоду. С. виражається в праві страховика на регресний позов до того, хто спричинив шкоду відповідно до чинного законодавства. Питання С. стосовно до конкретного страхового ризику містить договір страхування.

Товариство взаємного страхування — взаємна страхова компанія, членами і власниками якої є власники страхових полісів. Форма організації страхового фонду.

Сюрвейр (Surveyor) - експерт, що здійснює на прохання чи страхувальника страховика огляд судів і вантажів і, той, хто дає висновок про їхній стан.

Таблиці смертності – складаються на підставі даних про смертність населення і про його віковий склад.

Таємниця страхування — сукупність зведень про страхувальника, застрахованої особи і того, хто отримує вигоду; про стан їхнього здоров'я, а також про майнове положення цих осіб, що отримані страховиком у результаті своєї професійної діяльності і не підлягають розголошенню. За порушення Тобто, страховик несе відповідальність відповідно до Цивільного кодексу України (зобов'язаний відшкодувати заподіяні збитки чи компенсувати моральний збиток).

Тант'єма (Profit commission) – комісія (винагорода) із прибутку перестрахувальника перестрахувальнику за надання участі в перестрахувальних договорах. *Ціна* страхового ризику й інших витрат, адекватне грошове вираження зобов'язань страховика за укладеним договором страхування.

Тарифна ставка — ціна страхового ризику. Брутто-ставка в абсолютному грошовому вираженні, у чи відсотках проміле від страхової суми протягом визначеного тимчасового відрізка (терміну страхування). Брутто-ставка — це розрахована актуарієм нетто-ставка плюс навантаження. Нетто-ставка відбиває витрати страховика на виплату зі страхового фонду; навантаження — витрати страховика на ведення справи, оплату посередницьких послуг (комісійна винагорода) страхових чи агентів брокерів, закладену прибуток від проведення страхування й інші витрати.

Тарифне керівництво — систематичний виклад тарифів, використовуваних страховиком при укладення договорів страхування.

Той, що одержує вигоду - особа, призначувана страхувальником як одержувача страхової суми.

Третейський суд (Arbitration) - арбітраж, спосіб дозволу споровши, при якому сторони звертаються не в судові органи, а до окремих осіб - арбітрам, чи третейським суддям.

Факультативне перестрахування — метод перестрахування, при якому цеденту і перестрахувальникові надана можливість оцінки ризиків, що можуть бути передані в перестрахування чи цілком частково (у визначеній частці). З загальної кількості видів відповідальності, що страхуються, в перестрахування по розсуду цедента може бути запропонований якийсь один вид відповідальності. Перестрахувальник може цілком відхилити цю пропозицію і висунути зустрічну умову договору Ф.п.

Фонд страхової (страхові резерви) - сукупність фінансових резервів, призначених для попередження, локалізації і відшкодування збитку, нанесеного страхувальнику в результаті страхового випадку. Страхові резерви формуються за рахунок надходження страхових внесків і використовуються тільки для страхових виплат. Розміщення страхових резервів здійснюється страховиками на умовах диверсифікованості, зворотності, прибутковості і ліквідності.

Форс-мажор (Force major, Act of God) - нездоланна сила, надзвичайна подія, при якому страхувальник і страховик звільняються від своїх зобов'язань (війна, зміна суспільно-політичного ладу і т.п.).

Франшиза (Franchise) — передбачене умовами договору страхування звільнення страховика від відшкодування збитків, що не перевищують визначений розмір. Розрізняють умовну (що не віднімається) і безумовну (що віднімається) Ф., що встановлюються в чи відсотках абсолютній величині до страхової суми. Визначена частина збитків страхувальника, не підлягаючому відшкодуванню страховиком. Може бути умовної і безумовний При умовної ф. не відшкодовується сума збитку в межах суми коштів, що складають франшизу. Наприклад, якщо у.ф. -100 дол., а сума збитку - 90 дол., те страхова виплата не виробляється. Якщо ж сума збитку перевищує ф., те виплата виробляється цілком. Наприклад, якщо в першому прикладі сума збитку 200 дол., те страхова сума виплачується цілком.

Фрахт (Freight) - плата за провіз чи вантажу пасажирів водяним транспортом.

Фронтирування — прийом на чи страхування в перестрахування ризиків з метою передачі їх цілком (100%) іншим страховим чи перестрахувальним компаніям, часто на прохання останніх за відповідне винагороду.

Фронтируюча компанія — страховик, що видає на прохання іншого страховика страховий поліс від свого імені, маючи у виді, що 100% прийнятого ризику буде перестраховано в тієї страхової компанії, на прохання якої видається цей страховий поліс. Оскільки Ф.к. бере на себе юридичну відповідальність перед страхувальником, вона має право на винагороду за фронтирування.

Хеджирування (Headging) - огородження, страхування валютних і комерційних ризиків від несприятливих змін курсу валюти в майбутньому.

Цедент (Cedent) — страховик, що передає страховий ризик у перестрахування.

Цедирування ризику — див. *Цессия.*

Цесіонер, чи цесіонарій (Cessionary) — страховик, що приймає ризики в перестрахування. Перестрахувальник. Перестрахувальник, страхове Товариство, що приймають визначений ризик у перестрахування.

Цесія (Cession)— процес передачі страхового ризику в перестрахування. Має місце в правовідносинах між цедентом і цесіонарієм.

Чартер (Charter party) - форма договору морського перевезення: документ, що засвідчує наявність договору щодо фрахтування. Застосовуються три групи фрахтових угод: 1) рейсовий чартер, 2) тайм-чартер (фрахтування на час), 3) димайз-чартер (фрахтування на умовах оренди).

Частота страхових подій. Вона дорівнює співвідношенню між числом страхових подій і числом застрахованих об'єктів, тобто частота страхових подій показує, скільки страхових випадків приходиться на один об'єкт страхування.

Шомаж (Shomage) - страхування втрати прибутку в результаті фінансових утрат, зв'язаних із припиненням виробництва, у результаті настання страхового випадку.

Юрисдикція (Jurisdiction) - правосуддя. У морських полісах звичайно вказується країна, у якій підлягають дозволу судові суперечки, що випливають з умов страхування.

ДОДАТОК Б.
ТАБЛИЦІ СМЕРТНОСТІ.

Вік	Чоловіки			Жінки		
x	l_x	d_x	q_x	L_x	d_x	q_x
0	100000	2047	0,02047	100000	1512	0,01512
1	97953	200	0,002042	98488	161	0.001635
2	97753	113	0.001156	98327	98	0.000997
3	97640	85	0,000871	98229	69	0.000702
4	97555	78	0,0008	98 160	57	0,000581
5	97477	74	0,000759	98103	45	0.000459
6	97403	69	0,000708	98058	41	0,000418
7	97 334	62	0.000637	98017	39	0.000398
8	97.2'72	57	0,000586	97978	39	0,000398
9	99215	57	0.000586	97939	37	0,000378
10	97158	54	0,000556	97902	31	0,000317
11	97104	54	0,000556	97871	31	0,000317
12	97050	56	0,000577	97840	31	0,000317
13	96994	63	0.00065	97809	35	0,000358
14	96931	70	0,000722	97774	38	0,000389
15	96861	105	0.001084	97736	47	0.000481
16	96756	151	0,001561	97689	68	0,000696
17	96605	208	0,002153	97621	92	0,000942
18	96397	261	0,002708	97529	92	0,000943
19	96 136	299	0.00311	97437	93	0.000954
20	95837	351	0.003662	97344	93	0,000955
21	95486	379	0,003969	97251	94	0.000967
22	95 107	388	0.00408	97157	95	0.000978
23	94719	375	0.003959	97062	98	0.00101
24	94344	392	0.004155	96964	98	0.001011
25	93952	441	0.004694	96866	99	0.001022
26	93511	473	0.005058	96767	107	0,001106
27	93038	529	0.005686	96660	132	0.001366
28	92509	543	0,00587	96528	137	0,001419
29	91966	547	0.005948	96391	138	0,001432
30	91 419	597	0.00653	96253	149	0.001548
31	90822	639	0.007036	96 104	164	0,001706
32	90183	695	0.007707	95940	172	0.001793
33	89488	757	0.008459	95 768	180	0.00188
34	88731	797	0.008982	95588	197	0.002061
35	87934	832	0.009462	95391	218	0.002285
36	87 102	905	0,01039	95173	234	0,002459
37	86 197	907	0,010522	94939	250	0.002633
38	85290	940	0,011021	94689	267	0,00282
39	84350	1006	0.011926	94422	279	0,002955
40	83344	1145	0.013738	94 143	310	0.003293
41	82 199	1198	0.014574	93833	344	0.003666
42	81 001	1194	0.014741	93489	382	0.004086

Вік	**Чоловіки**			**Жінки**		
x	l_x	d_x	q_x	L_x	d_x	q_x
43	79807	1208	0.015137	93 107	417	0.004479
44	78599	1212	0.01542	92690	458	0.004941
45	77387	1292	0.016695	92232	449	0.004868
46	76095	1394	0.018319	91 783	481	0.005241
47	74701	1379	0,01846	91 302	512	0,005608
48	73322	1432	0,01953	90790	547	0.006025
4S	71890	1536	0,021366	90243	571	0,006327
50	70354	2001	0,028442	89672	680	0,007583
51	68353	2107	0.030825	88992	847	0.009518
52	66246	2156	0,032545	88 145	884	0.010029
53	64090	2143	0,033437	87261	966	0.01107
54	61947	2088	0,033706	86295	959	0.011113
55	59859	2028	0.03388	85336	949	0.011121
56	57831	1974	0.034134	84387	952	0,011281
57	558$7	1917	0,03432	83435	954	0,011434
58	53940	1870	0,034668	82481	1009	0,012233
59	52070	1824	0,03503	81472	1012	0.012421
60	50246	2127	0,042332	80460	1121	0,013932
61	48119	2458	0,051082	79339	1334	0.016814
62	45 661	2395	0.052452	78005	1499	0.019217
63	43266	2309	0,053368	76506	1621	0.021188
64	40957	2234	0.054545	74885	1745	0.023302
65	38723	2167	0.055962	71340	1785	0.024405
66	36556	2055	0,056215	71355	1812	0,025394
67	34501	2009	0,05823	69543	1834	0.026372
68	32492	1955	0,060169	67709	1844	0,027234
69	30537	1933	0,0633	65865	1914	0,029059
70	28604	1933	0,067578	63951	2075	0.032447
71	26671	1902	0,071313	61 876	2198	0.035523
72	24769	1820	0.073479	59678	2375	0,039797
73	22949	1803	0.078566	57303	2515	0.043889
74	21146	1735	0.082049	54788	2712	0.0495
75	19411	1782	0,091804	52076	2987	0.057358
76	17629	1831	0,103863	49089	3173	0,064638
77	15798	1762	0,111533	45916	3337	0,072676
78	14036	1734	0,123539	42579	3538	0,083093
79	12302	1687	0,137132	39041	3399	0,087062
80	10615	1461	0.137635	35642	3301	0,092615
81	9154	1283	0,140157	32341	3287	0,101636
82	7871	1153	0,146487	29054	3224	0.110966
83	6718	1078	0,160464	25830	3156	0.122184
84	5640	960	0,170213	22674	3151	0,13897
85	4680	861	0,183974	19523	3001	0,153716
86	3819	791	0,207122	16522	2919	0.176674
87	3028	640	0,211361	13603	2618	0,192458
88	2388	529	0,221524	10985	2302	0,209558

Вік	**Чоловіки**			**Жінки**		
x	l_x	d_x	q_x	L_x	d_x	q_x
89	1 859	431	0,231845	8683	1979	0,227917
90	1428	348	0,243697	6704	1659	0,247464
91	1 080	275	0,25463	5045	1355	0,268583
92	805	208	0,258385	3690	1073	0.290786
93	597	158	0.264657	2617	823	0.314482
94	439	138	0.314351	1794	610	0.340022
95	301	95	0,315615	1184	434	0,366554
96	206	66	0,320388	750	296	0,394667
97	140	45	0,321429	454	192	0,422907
98	95	32	0,336842	262	119	0,454198
99	63	22	0,349206	143	70	0,48951
100	41	41	1	73	73	1

ДОДАТОК В.
ТАБЛИЦІ КОМУТАЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Чоловіки Річна процентна ставка — 5%

Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
0	100000	1887590	1949,524	10114,77	342608,9	17,8759	0,101148
1	93288,57	1787590	181,4059	8165,244	332494.2	18,16194	0,087527
2	88664,85	1694301	97,61365	7983.838	324328,9	18,10905	0.090045
3	84345,10	1605636	69,92971	7886,224	316345.1	18.03651	0,093499
4	80258,74	1521291	61,11504	7816,294	308458,9	17,95484	0,097389
5	76375,78	1441033	55,21994	7755,179	300642,6	17.86766	0,10154
6	72683,62	1364657	49,03701	7699,959	292887,4	17,7753	0,105938
7	69173,46	1291973	41,96404	7650,922	285187,4	17,6773	0,110605
8	65867,52	1222800	36,74271	7608,958	277536,5	17,57299	0,115572
9	62666,86	1156962	34,99306	7572,216	269927,6	17,46246	0,120835
10	59646,58	1094297	31,57268	7537,223	262355,3	17,34634	0,126365
11	56774,70	1034650	30,06922	7505.65	2548)8.1	17,22379	0.132201
12	54041,07	977875.3	29.698	7475,581	247312.5	17,09504	0.138331
13	51437,99	923834,2	31,81928	7445,883	239836.9	16.96015	0,144755
14	48956,74	872396,2	33,6712	7414,063	232391	16.81974	0,151441
15	46591,80	823439,5	48,10171	7380,392	224976,9	16.67349	0.158405
16	44325,84	776847,7	65,8808	7332.29	217596,5	16,52616	0,165421
17	4^148,44	732522,7	86,4283	7266,41	210264,3	16,37959	0,1724
18	40054.94	690374,2	103,2866	7179,981	202997,8	16,23568	0,179253
19	38044,28	650319,3	112,69	7076,695	195817,9	16,09375	0,186012
20	36119,96	612275	125.9888	6964,005	188741.2	15,95116	0,192802
21	34273,97	576155	129.5611	6838,016	181777.2	15,81028	0,19951
22	32512,32	541881,1	126.3217	6708,455	174939,2	15,66695	0,206336
23	30837.79	509368,8	116.2755	6582,133	168230,7	15,51768	0,213444
24	29253.05	478531	115.7587	6465.858	161648,6	15,35833	0,221032
25	27744.29	449277,9	124,0272	6350.099	155182,7	15,19353	0,22888
26	26299,10	421533,6	126,6923	6226,072	148832,6	15,02844	0,236741
27	24920,07	395234,5	134,9445	6099,38	142606,5	14,86009	0,244758
-28-	23598,46	370314,5	131,9199	5964,435	136507,2	14,69232	0,252747
29	22342,80	346716	126,5635	5832,515	130542,7	14.51802	0,261047
30	21152,29	324373.2	131,5546	5705,952	124710,2	14,33513	0,269756
31	20013,49	303220,9	34,1045	5574,397	119004,3	14,15083	0,278532
32	18926.36	283207.4	138,9114	5440.293	113429.9	13.96365	0.287445
33	17886.19	264281,1	144.0986	5301,381	107989,6	13,7757	0,296395
34	16890.37	246394.9	144.4884	5157,283	102688,2	13.58789	0.305339
35	15941.58	229504,5	143,651	5012,794	97530,9	13,3966	0,314448
36	15038.81	213562,9	148,8142	4869,144	92518,1	13,20079	0.323772
37	14173,86	198524,1	142,0411	4720,329	87648,96	13,00636	0,333031
38	13356,87	184350,3	140,1991	4578,288	82928,63	12,8019	0,342767

Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
39	12580,63	170993,4	142,898	4438,089	78350,34	12,5918	0,352772
40	11838,66	158412,7	154,8974	4295.191	73912,25	12,38097	0,362811
41	11120,01	146574,1	154,3499	4140.294	69617.06	12,18111	0.372328
42	10436.14	135454.1	146.5091	3985.944	65476,77	11.97933	0.381937
43	9792.67	125017.9	141.1685	3839.435	61490.83	11.76648	0.392072
44	9185.184	115225.3	134.8914	3698.266	57651.39	11.54469	0.402634
45	8612,903	106040.1	136.9477	3563.375	53953.12	11.31177	0.413725
46	8065,817	97427,19	140.7232	3426,427	50389,75	11.07902	0,424808
47	7541,007	89361,37	132,58	3285,704	46963,32	10,85006	0,435712
48	7049,332	81820,36	131.1195	3153,124	43677,62	10,60683	0,447294
49	6582,53	74771,03	133,9449	3022,005	40524,49	10,35901	0,459095
50	6135,131	68188,5	166,1854	2888,06	37502.49	10,11443	0,470741
51	5676,797	62053.37	166.656	2721,874	34614.43	9.931054	0.479474
52	5239,817	56376,57	162,4112	2555.218	31892.56	9.759264	0.487654
53	4827,891	51136,76	153,7447	2392,807	29337.34	9.591946	0.495622
54	4444,246	46308.86	142.6655	2239.062	26944.53	9,419959	0.503811
55	4089,95	41864,62	131,9676	2096.397	24705,47	9.235973	0,512573
56	3763,223	37774,67	122,3368	1964,429	22609,07	9,03785	0.522007
57	3461,685	34011,44	113,1469	1482,092	20644,64	8,825112	0,532138
58	3183,696	30549,76	105,117	1728.946	18802.55	8,59569	0.543062
59	2926,974	27366,06	97.6488	1623.829	17073,6	8,349608	0,554781
60	2689,946	24439,09	108,4477	1526,18	15449,78	8,085346	0,567364
61	2453,406	21749,14	119,3563	1417.732	13923.6	7,864879	0.577863
62	\ 2217,22	19295,74	110,7592	1298.376	2505.86	7,70267	0.585587
63	2000,879	17078,52	101.6972	1187.617	11207.49	7.535506	0.593547
64	! 1803,902	15077,64	93,70844	1085,91	10019.87	7.358345	0.601984
65	1624,294	13273.74	86.56955	992,211	8933.951	7.172005	0.610857
66	1460,377'	11649,44	78,18596	905,6415	7941,74	6.977011	0.620142
67	1312,649	10189,07	72,79601	827,4555	7036,099	6.762216	0,630371
68	11777,346	8876,416	67,46603	754,6595	6208.643	6,539344	0,640984
69	1053,816	7699,07	63,5303	687,1935	5453.984	6.305897	0.6521
70	940,1039	6645,254	60,50505	623,6632	4766.79	6.068639	0,663398
71	834,832	5705,15	56,69973	56?,1581	4143..27	5.833891	0.674577
72	738,3783	4870,319	51,67168	506,4584	359,969	5.595966	0.685906
73	651.5458	4131.94	48.75146	154.7867	3073.511	5.34175	0.698012
74	571.7683	3480.394	44,67886	406,0353	2618,724	5,087071	0,710139
75	499,8624	2908.626	43,70398	361,3564	2212,689	4.818853	0.722912
76	432,3555	2408,764	42,76735	317,6524	1851,332	4,571258	0,734702
77	368,9998	1976,408	39,19589	274.8851	1533,68	4,356123	0,744947
78	312,2324	1607,408	36,73622	235,6892	1258,795	4,148115	0.754852
79	260,628	1295,176	34,03856	198,953	1023,106	3,969443	0,76336
80	214,1786	1034,548	28,07482	164,9144	824,1526	3,830305	0,769985

Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
81	175.9048	820.3694	23.48033	136,8396	659,2382	3.663712	0.777918
82	144.0481	644.4646	20.09636	113,3593	522.3986	3,473956	0,786954
83	117.0923	500.4165	17.89442	93.2629	409.0393	3.273695	0.796491
84	93,62201	383,3243	15.17682	75.36848	315.7764	3.094382	0.805029
85	73,987	289.7023	12,96353	60,19166	240,408	2.915583	0,813544
86	57,50028	215,7153	11,34247	47,22812	180,2163	2,751552	0,821355
87	43,4197	158,215	8,740206	35,88566	132,9882	2,643852	0,826483
88	32,61189	114,7953	6,880311	27,14545	97,10253	2,520044	0,832379
89	24,17863	82,18339	5,338759	20,26514	69,95708	2,399009	0,838142
90	17,68851	58,00476	4.105377	14,92638	49,69194	2,279233	0,843846
91	12,74082	40,31625	3.089706	10.821	34.76556	2,164336	0,849317
92	9.044413	27,57542	2.225658	7.731297	23.94456	2.04889	0,854815
93	6.388068	18,53101	1,610138	5,505639	16,21326	1,900879	0,861863
94	4,473737	12,14294	1.339355	3,895501	10.70762	1,714273	0.870749
95	2,921347	7,669204	0.878114	2,556146	6.812123	1,625229	0,874989
96	1,904121	4,747858	0.581008	1,678032	4,255977	1,493465	0,881264
97	1,232441	2,843737	0,377278	1,097025	2,577945	1,307403	0,890124
98	0,796475	1,611296	0,255511	0,719747	1,48092	1,023034	0,903665
99	0,503037	0,814821	0,167299	0,464236	0,761173	0.619803	0,922867
100	0,311784	0,311784	0,296937	0,296937	0,296937	0	0,952381

Жінки Річна процентна ставка — 5%

Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
0	100000	1977650	1440	5826,207	226663,7	18,7765	0,058262
1	93798.1	1877650	146,0317	4386,207	220837,4	19.01799	0.046762
2	89185,49	1783852	84,65608	4240,176	216451.2	19,00159	0,047543
3	84853.9	1694666	56,76647	4155.52	212211,1	18,97157	0,048973
4	80756,47	1609812	44.66099	4098.753	208055,5	18.93416	0,050754
5	76866,27	1529056	33,57969	4054,092	203956,8	18.89241	0.052742
6	73172,39	1452189	29.13793	4020,512	199902,7	18,84614	0,054946
7	69658,85	1379017	26,39674	3991,374	195882,2	18,79672	0,057299
8	66315,37	1309358	25.13975	3964,978	191890,8	18,74442	0,05979
9	63132,35	1243043	22,71479	3939,838	187925,8	18,68947	0,062406
10	60103,34	1179910	18,12506	3917,123	183986	18,63136	0,065173
11	57223,15	1119807	17,26196	3898,998	180068.9	18.56913	0.068137
12	54480.97	1062584	16.43996	3S81.736	176169.9	18.50376	0.071249
13	51870,2	1008103	17,67738	3865,296	172288,1	18.43511	0.074519
14	49382,51	956232,8	18.27865	3847.619	168422,8	18,36379	0.077915
15	47012,69	906850,3	21.53124	3829,34	164575.2	18,28948	0.081453
16	44752,46	859837,6	29,66817	3807,809	160745.9	18,21319	0,085086
17	42591.72	815085.1	38.2279	3778.141	156938.1	18.13717	0.088706

Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
18	40525,31	772493,4	36,40752	3739,913	153159,9	18,062	0.092286
19	38559,13	731968,1	35,05072	3703,505	149420	17,983	0,096047
20	36687,93	693409	33,38164	3668,455	145716,5	17,90019	0,099991
21	34907.5	656721	32.13389	3635.073	142048,1	17,81318	0,104134
22	33213.11	621813.5	30,92927	3602,939	138413	17,72193	0,108479
23	31600,6	588600.4	30.38666	35'''2.01	1'.4810,1	17.62624	0.113036
24	30065.42	556999.8	28,93967	3541,623	131238	17.52626	0,117797
25	28604.8	526934,4	27.84283	3512,683	127696,4	17,42119	0.1228
26	27214,82	498329,6	28,65977	3484,841	124183,7	17.31096	0,128049
27	25890,22	471114,8	33,67236	3456,181	120698,9	17,19663	0.133494
28	24623,68	445224,6	33,28365	3422,509	117242,7	17,08116	0,138993
29	23417,84	420600,9	31,93009	3389,225	113820,2	16,9607	0,144728
30	22270,77	397183.1	32,83356	3357,295	110431	16,83427	0,150749
31	21177.43	374912,3	34.41805	3324,461	107073,7	16.70339	0,156981
32	20134,56	353734.9	34.37808	3290.043	103749,2	16,56854	0,163403
33	19141.39	333600,3	34,26386	3255,665	100459.2	16.42821	0.170085
34	18195,63	314458,9	35,71419	3221.401	97203,52	16.28211	0,177043
35	17293.46	296263.3	37.63932	3185.687	93982.11	16.13152	0.184213
36	16432,32	278969,8	38,47794	3148,048	90796,43	15,97689	0,191577
37	15611,35	262537.5	39,15134	3109,57	87648,38	15,81709	0,199186
38	14828.81	246926,1	39,82251	3070,418	84538,81	15.65179	0,207058
39	14082,85	232097.3	39.63075	3030,596	81468,39	15,48085	0,215198
40	13372,61	218014.5	41,9373	2990,965	78437,8	15,30306	0,223664
41	12693.88	204641.9	44.32083	2949.028	75446.83	15,1213	0.232319
42	12045.09	191948	46.87308	2904.707	72497.8	14.93579	0.241153
43	11424.64	179902.9	48,73118	2857.834	69593.1	14.74692	0.250147
44	10831.88	168478.3	50.9738	2809.103	66735,26	14.55393	0.259337
45	10265.1	157646.4	47.59251	2758.129	63926,16	14.35751	0.26869
46	9728,693	147381.3	48.55657	2710,537	61168.03	14.14914	0,278613
47	9216,865	137652.6	49,22476	2661,98	58457,49	13,93486	0.288816
48	8728,742	128435,7	50,08546	2612,755	55795.51	13.71412	0,299328
49	8263,002	119707	49,79333	2562,67	53182,76	13,48711	0.310138
50	7819.733	111444	56.47479	2512,876	50620.09	13.25164	0,321351
51	7390.89	103624.2	66,99461	2456.402	48107.21	13.02054	0.332355
52	6971.948	96233.36	66.59159	2389.407	45650.81	12.80294	0.342717
53	6573,359	89261,41	69.30347	2322,815	43261,4	12,57927	0.353368
54	6191.038	82688.05	65,52502	2253,512	40938.59	12,35609	0.363996
55	5830,702	76497,01	61.75405	2187.987	38685.08	12,11969	0.375253
56	5491,295	70666.31	58,99931	2126,233	36497,09	11,86879	0,387201
57	5170.806	65175.02	56.30786	2067,234	34370.86	11,60442	0.399789
58	4868,269	60004,21	56,71821	2010.926	32303,62	11,32557	0,413068
59	4579,729	55135,94	54,17795	1954,207	30292,7	11,03913	0.426708
60	4307,468	50556,21	57,15554	1900,03	28338,49	10,73687	0,441101

Вік x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	a_x	A_x
61	4045,195	46248.74	64.77677	1842.874	26438.46	10.43301	0,455571
62	3787,79	42203,55	69.32275	1778.097	24595.59	10.142	0.469429
63	3538,096	38415.76	71.39501	1708,774	22817.49	9,857748	0.482964
64	3298.221	34877.66	73.1966!	1637.379	21108.71	9.574691	0.496443
65	3067.966	31579.44	"1.30902	1564,183	19471.34	9.293284	0.509844
66	2850,563	28511,48	68.94062	1492,874	17907,15	9,00205	0,523712
67	2645,881	25660,91	66,4549	1423.933	16414,28	8,698437	0,53817
68	2453.432	23015,03	63,63547	1357478	14990,35	8,380749	0.553298
69	2272,967	20561.6	62,90584	1293,843	13632,87	8.046151	0.569231
70	2101,824	18288,63	64,94981	1230,937	12339.02	7.701314	0.585652
71	1936.788	16186.81	65.52366	1165,987	11108.09	7.357555	0,602021
72	1779.036	14250,02	67.4287	1100.464	9942,1	7.009968	0.618573
73	1626.891	12470,99	68.00328	1033.035	8841,637	6.665531	0.634975
74	1481.417	10844,09	69.83807	965.0315	7808.602	6.320082	0.651425
75	1341.035	9362.677	73.25689	895,1935	6843.57	5.981679	0.667539
76	1203.92	8021,642	74.11294	821.9366	5948,377	5.662939	0.682717
77	1072.477	6817.723	74,23195	747.8236	5126,44	5.356987	0,697286
78	947,1748	5745,245	74,95545	673,5917	4378,617	5.065666	0.711159
79	827,1158	4798.071	68.58151	598.6362	3705,025	4,800966	0,723764
80	719,1478	3970.955	63.4325'''	530.0547	3106.389	4.521751	0,737059
81	621,4701	3251,807	60.15575	466,6221	2576.334	4,232444	0,750836
82	531,7205	2630,337	56,19313	406,4664	2109,712	3,946842	0,764436
83	450,2074	2098,617	52,38849	350,2732	1703.246	3.661444	0.778026
84	376,3804	1648.409	49.81475	297.8847	1352,972	3,379636	0.791446
85	308.6428	1272,029	45,18417	248,07	1055,088	3,121362	0,803745
86	248,7613	963,386	41,85671	202,8858	807,0176	2,872732	0.815584
87	195,0589	714,6247	35,7529	161,0291	604,1317	2,663636	0,825541
88	150,0174	519,5658	29,94041	125,2762	443,1026	2,463369	0,835078
89	112,9333	369,5484	24,5137	95,3358	317,8264	2,27227	0,844178
90	83,04186	256,615	19,57132	70,8221	222,4906	2,090189	0.852848
91	59,51617	173,5732	15,22382	51.25078	151.6685	1,916403	0,861124
92	41.45824	114,057	11,4814		100,4177	1.75113	0,868994
93	28,00264	72,59875	8.386982	24.54555	64,39079	1.592569	0.876544
94	18,28219	44,59612	5,920337	16.15857	39.84524	1,43932	0,883842
95	11,49128	26,31392	4.011594	10.23823	23.68667	1,289904	0,890957
96	6,932479	14,82264	2,605732	6,226639	13,44843	1,138145	0,898184
97	3,996629	7,890166	1,609718	3,620907	7,221796	0,974205	0,90599
98	2,196595	3,893537	0,950181	2,011188	3,600889	0,772533	0.915594
99	1,141814	1,696942	0,532314	1,061007	1,589701	0,48618	0,92923
100	0,555128	0,555128	0,528693	0,528693	0,528693	0	0,952381

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи
студентів зі спеціальності 7.050102 “Економічна кібернетика”
з дисципліни «Актуарні розрахунки»

Редакційно-видавничий комплекс

Верстка та редагування:

Підписано до друку р. Формат 30 х 42/4.
Папір Pollux. Різографія. Умовн. друк. арк. 8,8.
Обліково-видавн. арк. 8,81. Тираж 200 прим. Зам. №

НГУ
49027, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.